Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 4x^2 + 72x + 160\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{8x^2+72x+160}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 8x^2 + 72x + 160$
   (a) Démontrer que $x = -4$ et $x = -5$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(-4) = 0$$
$$N(-5) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 8(x - -4)(x - -5)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{8(x - -4)(x - -5)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{2+8i}{-9+3i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 10\sqrt{3} - 10i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 7 + 7\sqrt{3}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{1}{15} - \frac{13i}{15}$
2. $z_2 = 20e^{-\frac{i\pi}{6}}$
3. $z_3 = 14e^{\frac{i\pi}{3}}$
4. $z_4 = 280e^{\frac{i\pi}{6}} = 140\sqrt{3} + 140i = 243.0 + 140.0i$
5. $z_5 = \frac{10}{7}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -\frac{10i}{7} = -1.43i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -17 °C et les place dans une pièce à 16 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -3 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 16] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 16$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -17 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -3 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -33$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.04$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 13 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 2.5x^2 + -95x + 450\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{5x^2+-95x+450}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 5x^2 - 95x + 450$
   (a) Démontrer que $x = 9$ et $x = 10$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(9) = 0$$
$$N(10) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 5(x-9)(x-10)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{5(x-9)(x-10)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{10+5i}{-3+10i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = -5\sqrt{3} + 5i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -8\sqrt{2} - 8\sqrt{2}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{20}{109} - \frac{115i}{109}$
2. $z_2 = 10e^{\frac{5i\pi}{6}}$
3. $z_3 = 16e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
4. $z_4 = 160e^{\frac{i\pi}{12}} = 40\sqrt{2} + 40\sqrt{6} + i\left(-40\sqrt{2} + 40\sqrt{6}\right) = 155.0 + 41.4i$
5. $z_5 = \frac{5}{8}e^{\frac{19i\pi}{12}} = -\frac{5\sqrt{2}}{32} + \frac{5\sqrt{6}}{32} + i\left(-\frac{5\sqrt{6}}{32} - \frac{5\sqrt{2}}{32}\right) = 0.162 - 0.604i$

Exercice 3 Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -17 °C et les place dans une pièce à 17 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -1 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.

Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.

L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 17] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 17$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -17 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -1 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -34$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.04$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 14 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 3.5x^2 + -21x + -196\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{7x^2+-21x+-196}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 7x^2 - 21x - 196$
   (a) Démontrer que $x = -4$ et $x = 7$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(-4) = 0$$
$$N(7) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 7(x - -4)(x - 7)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{7(x - -4)(x - 7)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{8+9i}{-9+5i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = -8\sqrt{3} + 8i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -5 - 5\sqrt{3}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{27}{106} - \frac{121i}{106}$
2. $z_2 = 16e^{\frac{5i\pi}{6}}$
3. $z_3 = 10e^{-\frac{2i\pi}{3}}$
4. $z_4 = 160e^{\frac{i\pi}{6}} = 80\sqrt{3} + 80i = 139.0 + 80.0i$
5. $z_5 = \frac{8}{5}e^{\frac{3i\pi}{2}} = -\frac{8i}{5} = -1.6i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -15 °C et les place dans une pièce à 22 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -1 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 22] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 22$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -15 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -1 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -37$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.03$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 19 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 3.5x^2 + -84x + 140\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{7x^2+-84x+140}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 7x^2 - 84x + 140$
   (a) Démontrer que $x = 10$ et $x = 2$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(10) = 0$$
$$N(2) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 7(x-10)(x-2)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{7(x-10)(x-2)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{8+8i}{-7+4i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 7\sqrt{3} - 7i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -2\sqrt{3} + 2i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{24}{65} - \frac{88i}{65}$
2. $z_2 = 14e^{-\frac{i\pi}{6}}$
3. $z_3 = 4e^{\frac{5i\pi}{6}}$
4. $z_4 = 56e^{\frac{2i\pi}{3}} = -28 + 28\sqrt{3}i = -28.0 + 48.5i$
5. $z_5 = \frac{7}{2}e^{-i\pi} = -\frac{7}{2} = -3.5$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -19 °C et les place dans une pièce à 23 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 3 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 23] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 23$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -19 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 3 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -42$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.05$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 20 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 5x^2 + 130x + 300\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{10x^2+130x+300}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 10x^2 + 130x + 300$
   (a) Démontrer que $x = -10$ et $x = -3$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)

$$N(-10) = 0$$
$$N(-3) = 0$$

   (b)

$$N(x) = 10(x - -10)(x - -3)$$

   (c)

$$f'(x) = \frac{10(x - -10)(x - -3)}{x}$$

3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{8+10i}{-3+2i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -10\sqrt{2} + 10\sqrt{2}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{4}{13} - \frac{46i}{13}$
2. $z_2 = 2e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
3. $z_3 = 20e^{\frac{3i\pi}{4}}$
4. $z_4 = 40e^{0} = 40 = 40.0$
5. $z_5 = \frac{1}{10}e^{-\frac{3i\pi}{2}} = \frac{i}{10} = 0.1i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -20 °C et les place dans une pièce à 24 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -3 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 24] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 24$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -20 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -3 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -44$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.03$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 21 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 3.5x^2 + -42x + -280\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{7x^2+-42x+-280}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 7x^2 - 42x - 280$
   (a) Démontrer que $x = 10$ et $x = -4$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(10) = 0$$
$$N(-4) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 7(x-10)(x--4)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{7(x-10)(x--4)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{3+8i}{-10+5i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -3 + 3\sqrt{3}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{2}{25} - \frac{19i}{25}$
2. $z_2 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$
3. $z_3 = 6e^{\frac{2i\pi}{3}}$
4. $z_4 = 12e^{i\pi} = -12 = -12.0$
5. $z_5 = \frac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}i}{6} = 0.167 - 0.289i$

Exercice 3 Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -20 °C et les place dans une pièce à 17 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 4 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.

Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 17] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 17$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -20 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 4 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -37$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.07$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 14 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 5x^2 + 70x + 60\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{10x^2+70x+60}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 10x^2 + 70x + 60$
   (a) Démontrer que $x = -6$ et $x = -1$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(-6) = 0$$
$$N(-1) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 10(x - -6)(x - -1)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{10(x - -6)(x - -1)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{3+5i}{-4+5i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 5 + 5\sqrt{3}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -4\sqrt{3} - 4i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{13}{41} - \frac{35i}{41}$
2. $z_2 = 10e^{\frac{i\pi}{3}}$
3. $z_3 = 8e^{-\frac{5i\pi}{6}}$
4. $z_4 = 80e^{-\frac{i\pi}{2}} = -80i = -80.0i$
5. $z_5 = \frac{5}{4}e^{\frac{7i\pi}{6}} = -\frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{5i}{8} = -1.08 - 0.625i$

Exercice 3 Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -20 °C et les place dans une pièce à 21 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 4 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 21] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 21$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -20 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 4 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -41$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.06$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 18 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 5x^2 + 0x + -360\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{10x^2+0x+-360}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 10x^2 - 360$
   (a) Démontrer que $x = 6$ et $x = -6$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(6) = 0$$
$$N(-6) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 10(x-6)(x--6)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{10(x-6)(x--6)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{10+8i}{-5+7i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 9\sqrt{2} - 9\sqrt{2}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 7\sqrt{3} + 7i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{3}{37} - \frac{55i}{37}$
2. $z_2 = 18e^{-\frac{i\pi}{4}}$
3. $z_3 = 14e^{\frac{i\pi}{6}}$
4. $z_4 = 252e^{-\frac{i\pi}{12}} = 63\sqrt{2} + 63\sqrt{6} + i\left(-63\sqrt{6} + 63\sqrt{2}\right) = 243.0 - 65.2i$
5. $z_5 = \frac{9}{7}e^{-\frac{5i\pi}{12}} = -\frac{9\sqrt{2}}{28} + \frac{9\sqrt{6}}{28} + i\left(-\frac{9\sqrt{6}}{28} - \frac{9\sqrt{2}}{28}\right) = 0.333 - 1.24i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -15 °C et les place dans une pièce à 17 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -1 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.

L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 17] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 17$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -15 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -1 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -32$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.04$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 14 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 3x^2 + 78x + 240\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{6x^2+78x+240}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 6x^2 + 78x + 240$
   (a) Démontrer que $x = -5$ et $x = -8$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(-5) = 0$$
$$N(-8) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 6(x - -5)(x - -8)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{6(x - -5)(x - -8)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{10+5i}{-6+4i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -7 - 7\sqrt{3}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{10}{13} - \frac{35i}{26}$
2. $z_2 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$
3. $z_3 = 14e^{-\frac{2i\pi}{3}}$
4. $z_4 = 28e^{-\frac{i\pi}{3}} = 14 - 14\sqrt{3}i = 14.0 - 24.3i$
5. $z_5 = \frac{1}{7}e^{i\pi} = -\frac{1}{7} = -0.143$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -18 °C et les place dans une pièce à 25 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 4 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 25] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 25$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -18 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 4 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -43$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.05$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 22 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 4.5x^2 + -27x + -36\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{9x^2+-27x+-36}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 9x^2 - 27x - 36$
   (a) Démontrer que $x = 4$ et $x = -1$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(4) = 0$$
$$N(-1) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 9(x-4)(x--1)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{9(x-4)(x--1)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{6+5i}{-6+5i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 8\sqrt{3} - 8i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 5 - 5\sqrt{3}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{11}{61} - \frac{60i}{61}$
2. $z_2 = 16e^{-\frac{i\pi}{6}}$
3. $z_3 = 10e^{-\frac{i\pi}{3}}$
4. $z_4 = 160e^{-\frac{i\pi}{2}} = -160i = -160.0i$
5. $z_5 = \frac{8}{5}e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{4i}{5} = 1.39 + 0.8i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -16 °C et les place dans une pièce à 23 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 0 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 23] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 23$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -16 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 0 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -39$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.04$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 20 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 2.5x^2 + -25x + -180\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{5x^2+-25x+-180}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 5x^2 - 25x - 180$
   (a) Démontrer que $x = -4$ et $x = 9$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(-4) = 0$$
$$N(9) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 5(x - -4)(x - 9)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{5(x - -4)(x - 9)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{8+3i}{-6+6i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = -4 - 4\sqrt{3}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 8\sqrt{3} + 8i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{5}{12} - \frac{11i}{12}$
2. $z_2 = 8e^{-\frac{2i\pi}{3}}$
3. $z_3 = 16e^{\frac{i\pi}{6}}$
4. $z_4 = 128e^{-\frac{i\pi}{2}} = -128i = -128.0i$
5. $z_5 = \frac{1}{2}e^{-\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4} = -0.433 - 0.25i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -20 °C et les place dans une pièce à 25 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -3 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 25] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 25$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -20 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -3 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -45$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.03$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 22 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 3.5x^2 + 21x + -490\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{7x^2+21x+-490}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 7x^2 + 21x - 490$
   (a) Démontrer que $x = -10$ et $x = 7$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(-10) = 0$$
$$N(7) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 7(x - -10)(x - 7)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{7(x - -10)(x - 7)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{5+7i}{-6+4i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{1}{26} - \frac{31i}{26}$
2. $z_2 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$
3. $z_3 = 16e^{\frac{3i\pi}{4}}$
4. $z_4 = 32e^{\frac{5i\pi}{12}} = -8\sqrt{2} + 8\sqrt{6} + i\left(8\sqrt{2} + 8\sqrt{6}\right) = 8.28 + 30.9i$
5. $z_5 = \frac{1}{8}e^{-\frac{13i\pi}{12}} = -\frac{\sqrt{6}}{32} - \frac{\sqrt{2}}{32} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{32} + \frac{\sqrt{6}}{32}\right) = -0.121 + 0.0323i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -19 °C et les place dans une pièce à 15 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -2 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.

Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.

Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.

L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 15] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 15$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -19 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -2 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -34$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.05$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 12 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 5x^2 + -40x + -450\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{10x^2+-40x+-450}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 10x^2 - 40x - 450$
   (a) Démontrer que $x = 9$ et $x = -5$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(9) = 0$$
$$N(-5) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 10(x-9)(x--5)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{10(x-9)(x--5)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{2+4i}{-5+7i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 7 + 7\sqrt{3}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 7\sqrt{2} + 7\sqrt{2}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{9}{37} - \frac{17i}{37}$
2. $z_2 = 14e^{\frac{i\pi}{3}}$
3. $z_3 = 14e^{\frac{i\pi}{4}}$
4. $z_4 = 196e^{\frac{7i\pi}{12}} = -49\sqrt{6} + 49\sqrt{2} + i\left(49\sqrt{2} + 49\sqrt{6}\right) = -50.7 + 189.0i$
5. $z_5 = 1e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 0.966 + 0.259i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -15 °C et les place dans une pièce à 25 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 0 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.

L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 25] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 25$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -15 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 0 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -40$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.03$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 22 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 2.5x^2 + -50x + 120\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{5x^2+-50x+120}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 5x^2 - 50x + 120$
   (a) Démontrer que $x = 6$ et $x = 4$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(6) = 0$$
$$N(4) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 5(x-6)(x-4)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{5(x-6)(x-4)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{10+10i}{-2+3i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = -7\sqrt{2} - 7\sqrt{2}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -9\sqrt{2} + 9\sqrt{2}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{10}{13} - \frac{50i}{13}$
2. $z_2 = 14e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
3. $z_3 = 18e^{\frac{3i\pi}{4}}$
4. $z_4 = 252e^{0} = 252 = 252.0$
5. $z_5 = \frac{7}{9}e^{-\frac{3i\pi}{2}} = \frac{7i}{9} = 0.778i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -16 °C et les place dans une pièce à 22 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 3 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 22] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 22$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -16 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 3 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -38$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.05$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 19 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 5x^2 + 0x + -810\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{10x^2+0x+-810}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 10x^2 - 810$
   (a) Démontrer que $x = -9$ et $x = 9$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(-9) = 0$$
$$N(9) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 10(x - -9)(x - 9)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{10(x - -9)(x - 9)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{8+4i}{-3+5i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 6 + 6\sqrt{3}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{2}{17} - \frac{26i}{17}$
2. $z_2 = 4e^{\frac{3i\pi}{4}}$
3. $z_3 = 12e^{\frac{i\pi}{3}}$
4. $z_4 = 48e^{\frac{13i\pi}{12}} = -12\sqrt{6} - 12\sqrt{2} + i\left(-12\sqrt{6} + 12\sqrt{2}\right) = -46.4 - 12.4i$
5. $z_5 = \frac{1}{3}e^{\frac{5i\pi}{12}} = -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{6}}{12} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{6}}{12}\right) = 0.0863 + 0.322i$

Exercice 3 Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -15 °C et les place dans une pièce à 20 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -3 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.

L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 20] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 20$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -15 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -3 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -35$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.03$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 17 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

DS8 NARDINI Kakary

TST sti2d – À render pour le vendredi 9 avril à 10h au plus tard

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 3x^2 + -18x + -108\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{6x^2+-18x+-108}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 6x^2 - 18x - 108$
   (a) Démontrer que $x = 6$ et $x = -3$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(6) = 0$$
$$N(-3) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 6(x-6)(x--3)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{6(x-6)(x--3)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{9+6i}{-3+6i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = -4 - 4\sqrt{3}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{1}{5} - \frac{8i}{5}$
2. $z_2 = 8e^{-\frac{2i\pi}{3}}$
3. $z_3 = 18e^{\frac{i\pi}{4}}$
4. $z_4 = 144e^{-\frac{5i\pi}{12}} = -36\sqrt{2} + 36\sqrt{6} + i\left(-36\sqrt{6} - 36\sqrt{2}\right) = 37.3 - 139.0i$
5. $z_5 = \frac{4}{9}e^{-\frac{11i\pi}{12}} = -\frac{\sqrt{6}}{9} - \frac{\sqrt{2}}{9} + i\left(-\frac{\sqrt{6}}{9} + \frac{\sqrt{2}}{9}\right) = -0.429 - 0.115i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -18 °C et les place dans une pièce à 17 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 2 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.

L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 17] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 17$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -18 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 2 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -35$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.06$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 14 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 5x^2 + -40x + -450\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{10x^2+-40x+-450}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 10x^2 - 40x - 450$
   (a) Démontrer que $x = 9$ et $x = -5$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(9) = 0$$
$$N(-5) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 10(x-9)(x--5)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{10(x-9)(x--5)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{5+2i}{-10+2i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 6 - 6\sqrt{3}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 10\sqrt{3} + 10i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{23}{52} - \frac{15i}{52}$
2. $z_2 = 12e^{-\frac{i\pi}{3}}$
3. $z_3 = 20e^{\frac{i\pi}{6}}$
4. $z_4 = 240e^{-\frac{i\pi}{6}} = 120\sqrt{3} - 120i = 208.0 - 120.0i$
5. $z_5 = \frac{3}{5}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -\frac{3i}{5} = -0.6i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -18 °C et les place dans une pièce à 19 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -2 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 19] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 19$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -18 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -2 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -37$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.04$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 16 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 3x^2 + -54x + 108\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{6x^2+-54x+108}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 6x^2 - 54x + 108$
   (a) Démontrer que $x = 3$ et $x = 6$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(3) = 0$$
$$N(6) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 6(x-3)(x-6)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{6(x-3)(x-6)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{7+9i}{-3+7i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = -6 + 6\sqrt{3}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 10 + 10\sqrt{3}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{21}{29} - \frac{38i}{29}$
2. $z_2 = 12e^{\frac{2i\pi}{3}}$
3. $z_3 = 20e^{\frac{i\pi}{3}}$
4. $z_4 = 240e^{i\pi} = -240 = -240.0$
5. $z_5 = \frac{3}{5}e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{3}{10} + \frac{3\sqrt{3}i}{10} = 0.3 + 0.52i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -20 °C et les place dans une pièce à 16 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 4 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 16] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 16$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -20 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 4 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -36$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.07$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 13 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

DS8 — TAVERNIER Joanny

TST sti2d – À render pour le vendredi 9 avril à 10h au plus tard

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 4.5x^2 + -144x + 567\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{9x^2+-144x+567}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 9x^2 - 144x + 567$
   (a) Démontrer que $x = 9$ et $x = 7$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(9) = 0$$
$$N(7) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 9(x-9)(x-7)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{9(x-9)(x-7)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{10+6i}{-4+5i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = -8\sqrt{3} + 8i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = 5 - 5\sqrt{3}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = -\frac{10}{41} - \frac{74i}{41}$
2. $z_2 = 16e^{\frac{5i\pi}{6}}$
3. $z_3 = 10e^{-\frac{i\pi}{3}}$
4. $z_4 = 160e^{\frac{i\pi}{2}} = 160i = 160.0i$
5. $z_5 = \frac{8}{5}e^{\frac{7i\pi}{6}} = -\frac{4\sqrt{3}}{5} - \frac{4i}{5} = -1.39 - 0.8i$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -19 °C et les place dans une pièce à 21 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de -4 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 21] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 21$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -19 °C et que, au bout de 15 min, elle est de -4 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -40$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.03$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 18 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 1 — Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x) = 4.5x^2 + -54x + -63\ln(x)$

1. Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{9x^2+-54x+-63}{x}$.
2. Étude du numérateur de $f'(x)$: $N(x) = 9x^2 - 54x - 63$
   (a) Démontrer que $x = 7$ et $x = -1$ sont deux racines de $N(x)$..
   (b) Proposer une forme factorisée de $N(x)$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Solution 1

1. pas de correction disponible
2. (a)
$$N(7) = 0$$
$$N(-1) = 0$$
   (b)
$$N(x) = 9(x-7)(x--1)$$
   (c)
$$f'(x) = \frac{9(x-7)(x--1)}{x}$$
3. Pas de correction disponible

Exercice 2 — Complexes

1. Mettre le nombre complexe suivant sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{7+4i}{-4+8i}$
2. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_2 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$
3. Mettre le complexe suivante sous forme exponentielle $z_3 = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$
4. Calculer le produit $z_4 = z_2 \times z_3$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.
5. Calculer le quotient $z_5 = \frac{z_2}{z_3}$ donner le résultat sous forme exponentielle puis algébrique.

Solution 2

1. $z_1 = \frac{1}{20} - \frac{9i}{10}$
2. $z_2 = 8e^{\frac{i\pi}{4}}$
3. $z_3 = 8e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
4. $z_4 = 64e^{-\frac{i\pi}{2}} = -64i = -64.0i$
5. $z_5 = 1e^{i\pi} = -1 = -1.0$

Exercice 3 — Sortie du congélateur

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -18 °C et les place dans une pièce à 21 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 4 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).

On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 21] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) a pour solutions $\theta(t) = Ke^{at} + 21$ où K est un nombre réel.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -18 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 4 °C.

2. En utilisant la condition à $t = 0$ démontrer que $K = -39$.
3. En utilisant la condition à $t = 15$ démontrer que $a \approx -0.06$.
4. En déduire l'expression de la solution de l'équation différentielle puis étudier ses variations.
5. La température idéale de dégustation des macarons étant de 18 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?