Exercice 5 — Résolution d'équations différentielles

Déterminer la solution unique des équations différentielles suivantes

1. $\begin{cases} y' = 0.1y \\ f(0) = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' = 2y + 4 \\ f(0) = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' = 0.1y \\ f(0) = 2 \end{cases}$

Exercice 6 — Chutte d'objets

On veut étudier la chute d'un objet dû à l'attraction terrestre. On lâché l'objet à $t = 0$ avec une vitesse nulle.

1. On suppose que que l'objet ne subit pas de frottement. Il est donc uniquement soumis à l'attraction terrestre et donc le bilan des forces donne l'équation différentielle suivante
$$\frac{dv}{dt} = 9,81$$
où $v(t)$ est la vitesse en fonction du temps.
   (a) Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps.
   (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de la vitesse. Que peut-on dire de la vitesse quand le temps devient très grand ?
2. On ajoute une force de résistance dû aux frottements avec l'aire. Le bilan des force donne l'équation différentielle suivante
$$\frac{dv}{dt} = -0.5v(t) + 9,81$$
   (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.
   (b) En prenant en compte, les conditions initiales, déterminer la solution unique de l'équation.
   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de la vitesse. Que peut-on dire de la vitesse quand le temps devient très grand ?

Exercice 7 — Résolution d'équations différentielles

L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence.

Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.

La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction f du temps t, exprimé en minutes. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ y' + 0,12y = 0,003.$$

À l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de $0,5$ mole par litre (mol.L^{-1}).

1. (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
   (b) Donner $f(0)$.
   (c) Vérifier que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 0,475\,\mathrm{e}^{-0,12t} + 0,025$.
2. (a) Calculer la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   (c) Interpréter cette réponse dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer, en justifiant votre réponse, à la minute près, le temps nécessaire pour obtenirune concentration en octane dans la cuve de $0,25$ mole par litre.
4. (a) Par une lecture graphique, déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
   Interpréter le résultat dans le contexte.
   (b) Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure. Expliquer ce choix.