

Probabilités conditionnelles - Cours

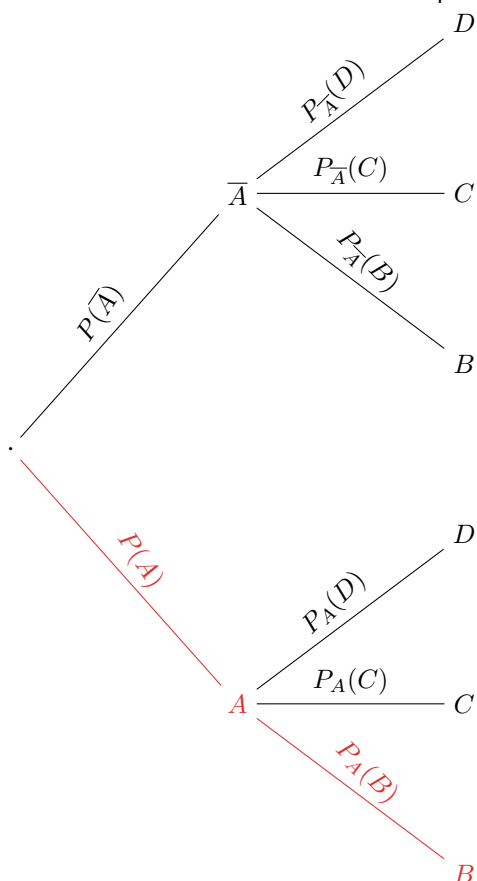
- Mars 2021

3 Formule de Bayes

Arbre de probabilité

Les probabilités conditionnelles peuvent se représenter sous forme d'arbre de probabilité.

Soit A deux évènements de E avec $P(A) \neq 0$ et B, C et D trois autres évènements de E . Alors on peut considérer l'arbre de probabilité ci-contre et on obtient les propriétés suivantes :



- La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.

On a alors

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ou encore

$$P_A(B) + P_A(C) + P_A(D) = 1$$

- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches parcourues.

On a alors (chemin rouge)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Ou encore

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins qui conduisent à cet évènement.

C'est la loi des probabilités totale qui peut se traduire dans notre exemple par

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

ou

$$P(C) = P(A \cap C) + P(\bar{A} \cap C)$$

Définition Formule de Bayes

Soit A et B deux évènements avec $P(A)$ non nul, Alors

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \times P(B)}{P(A)}$$

Démonstration

À faire au crayon à papier : Démontrer la formule de Bayes à partir de la formule $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Exemple En utilisant les données et les notations de le l'exemple précédent, calculer la probabilité d'être malade sachant que l'on est positif.

À faire au crayon à papier :