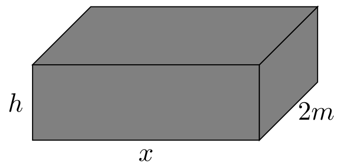
DM1 BALLARD Antoine

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $20m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{10}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 20 + \frac{40}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 20x + 40}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{4x^2 - 40}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 20$, h doit être égale à $10/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 20$, h doit être égale à $10/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 2 \\ 20 & = & h \times x \times 2 \\ x & = & \dfrac{20}{h \times 2} = \dfrac{10}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{10}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \dfrac{10}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & 4x + 20 + \dfrac{40}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 4x + 20 + \dfrac{40}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x \times x}{x} + \dfrac{20 \times x}{x} + \dfrac{40}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x^2 + 20x + 40}{x} \end{array}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 4x^2 + 20x + 40 \Rightarrow u'(x) = 8x + 20$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (8x+20) \times x - (4x^2+20x+40) \times 1 \\ &= 4x^2 - 40 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{4x^2-40}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $4x^2 - 40$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 640 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -3.1622776601683795 \qquad x_2 = 3.1622776601683795$$

Et on sait que $4x^2 - 40$ est du signe de a donc positif en dehors des racines

- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-3.1622776601683795		10
$4x^2 - 40$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 3.1622776601683795$ et $h = 31.6227766016837950$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 4.7x - 7.9\right) e^{-x} + 7.9$$

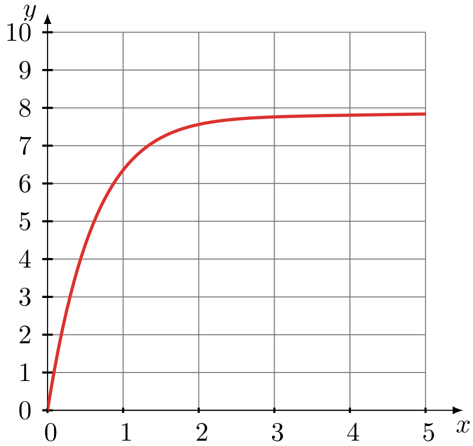
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x) = 7.9x + \left(x^2 - 2.7x + 5.2\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{10.4}{e^4} + 26.4$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à

$$(\frac{10.4}{e^4} + 26.4) \times 4 \times 15^2 = 23931.00000$$

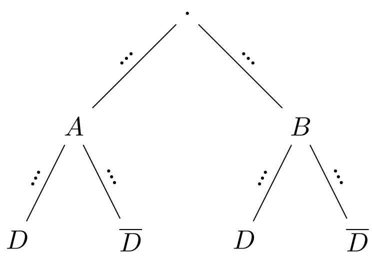
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 40.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 24.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 50.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



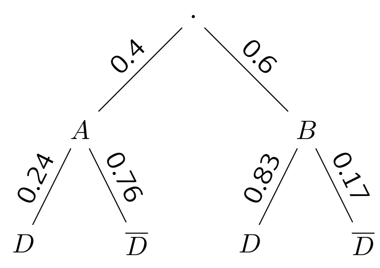
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.6.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 60.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 12)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

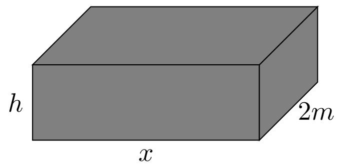
2. - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.4$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.6$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.24$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.5$$
3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.4 \times 0.24 = 0.1$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.1 + 0.5 = 0.6$$
4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.1}{0.6} = 0.17$$
5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0.6$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 12) = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} \times 0.6^{12} \times 0.4^{3}$$
7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.6^{0} \times 0.4^{15}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 15 \times 0.6 = 9.0$$

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $14m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{7}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 14 + \frac{28}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 14x + 28}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{4x^2 - 28}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 14$, h doit être égale à $7/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 14$, h doit être égale à $7/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 2 \\ 14 & = & h \times x \times 2 \\ x & = & \frac{14}{h \times 2} = \frac{7}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \frac{7}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \frac{7}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & 4x + 14 + \frac{28}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 4x + 14 + \frac{28}{x} \\ S(x) & = & \frac{4x \times x}{x} + \frac{14 \times x}{x} + \frac{28}{x} \\ S(x) & = & \frac{4x^2 + 14x + 28}{x} \end{array}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 4x^2 + 14x + 28 \Rightarrow u'(x) = 8x + 14$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (8x+14) \times x - (4x^2+14x+28) \times 1 \\ &= 4x^2 - 28 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{4x^2 - 28}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $4x^2 - 28$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 448 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -2.6457513110645907 \qquad x_2 = 2.6457513110645907$$

     Et on sait que $4x^2 - 28$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2.6457513110645907		10
$4x^2-28$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
S'	||	$-$	0	$+$	
S	||	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.6457513110645907$ et $h = 18.520259177452134 9$.

Exercice 2 Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 7.7x - 8.4\right) e^{-x} + 8.4$$

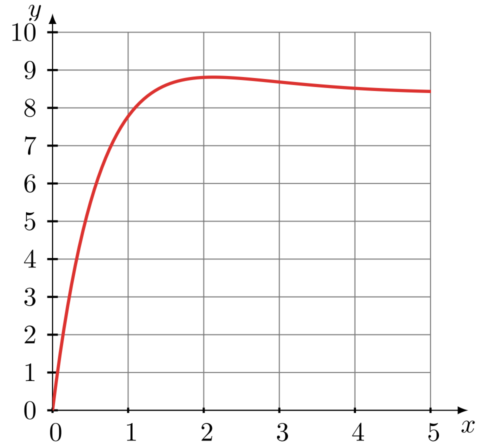
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x) = 8.4x + \left(x^2 - 5.7x + 2.7\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\, dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

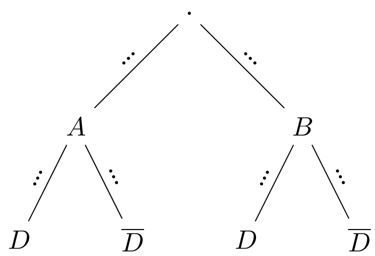
2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = 30.9 - \frac{4.1}{e^4}$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(30.9 - \frac{4.1}{e^4}) \times 4 \times 15^2 = 27742.00000$$

Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cette exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 14.000000000000002 % des stylos, et parmi ceux-là, 51.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 61.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :



- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »

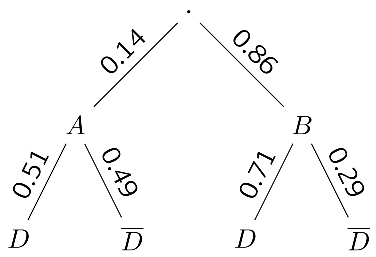
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.68.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 68.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 10)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

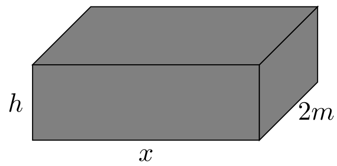
2. - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
$$P(A) = 0.14$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
$$P(B) = 0.86$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
$$P_A(D) = 0.51$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
$$P(D \cap D) = 0.61$$
3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.14 \times 0.51 = 0.07$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.07 + 0.61 = 0.68$$
4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.07}{0.68} = 0.1$$
5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0.68$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
$$P(X = 10) = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix} \times 0.68^{10} \times 0.32^{6}$$
7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
$$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.68^{0} \times 0.32^{16}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
$$E[X] = n \times p = 16 \times 0.68 = 10.88$$

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $8m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{4}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire

$$S(x) = 4x + 8 + \frac{16}{x}$$

4. Démontrer que

$$S(x) = \frac{4x^2 + 8x + 16}{x}$$

5. Démontrer que

$$S'(x) = \frac{4x^2 - 16}{x^2}$$

6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 8$, h doit être égale à $4/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 8$, h doit être égale à $4/3$
2. Pour calculer le volume, on a

$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 2 \\ 8 & = & h \times x \times 2 \\ x & = & \dfrac{8}{h \times 2} = \dfrac{4}{h} \end{array}$$

3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{4}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \dfrac{4}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & 4x + 8 + \dfrac{16}{x} \end{array}$$

4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 4x + 8 + \dfrac{16}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x \times x}{x} + \dfrac{8 \times x}{x} + \dfrac{16}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x^2 + 8x + 16}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 4x^2 + 8x + 16 \Rightarrow u'(x) = 8x + 8$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x) &= (8x+8)\times x-(4x^2+8x+16)\times 1 \\ &= 4x^2-16 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x)=\frac{4x^2-16}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
   - Signe de $4x^2-16$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 256 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1=-2 \qquad x_2=2$$

     Et on sait que $4x^2-16$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2		10
$4x^2-16$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x^2	$\|\|$	$+$		$+$	
S'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
S	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x=2$ et $h=8$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x)=\left(-x^2+9.4x-4.9\right)e^{-x}+4.9$$

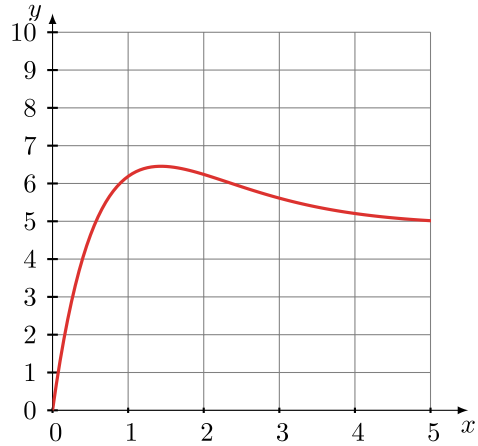
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

   $$F(x)=4.9x+\left(x^2-7.4x-2.5\right)e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

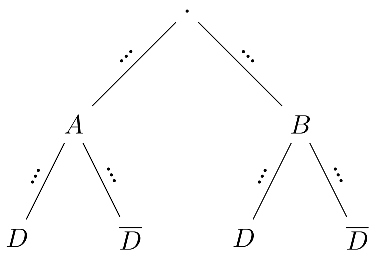
2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = 22.1 - \frac{16.1}{e^4}$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(22.1 - \frac{16.1}{e^4}) \times 4 \times 15^2 = 19625.00000$$

Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 37.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 24.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 22.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :



- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »

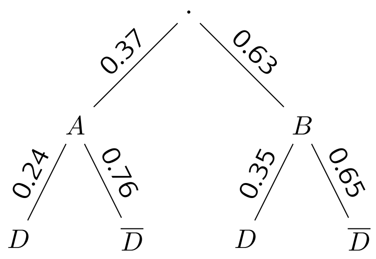
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.31.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 31.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 12)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2. - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
$$P(A) = 0.37$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
$$P(B) = 0.63$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
$$P_A(D) = 0.24$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
$$P(D \cap D) = 0.22$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.37 \times 0.24 = 0.09$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.09 + 0.22 = 0.31$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.09}{0.31} = 0.29$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 18$ et $p = 0.31$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
$$P(X = 12) = \binom{18}{12} \times 0.31^{12} \times 0.69^{6}$$

7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
$$P(X = 0) = \binom{18}{0} \times 0.31^{0} \times 0.69^{18}$$
Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
$$E[X] = n \times p = 18 \times 0.31 = 5.58$$

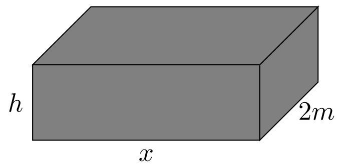
DM1 CHAKIR Iman

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $16m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{8}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 16 + \frac{32}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 16x + 32}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{4x^2 - 32}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 16$, h doit être égale à $8/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 16$, h doit être égale à $8/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V &=& h \times x \times 2 \\ 16 &=& h \times x \times 2 \\ x &=& \dfrac{16}{h \times 2} = \dfrac{8}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) &=& x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) &=& x \times \dfrac{8}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \dfrac{8}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) &=& 4x + 16 + \dfrac{32}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) &=& 4x + 16 + \dfrac{32}{x} \\ S(x) &=& \dfrac{4x \times x}{x} + \dfrac{16 \times x}{x} + \dfrac{32}{x} \\ S(x) &=& \dfrac{4x^2 + 16x + 32}{x} \end{array}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 4x^2 + 16x + 32 \Rightarrow u'(x) = 8x + 16$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (8x+16) \times x - (4x^2 + 16x + 32) \times 1 \\ &= 4x^2 - 32 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{4x^2 - 32}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $4x^2 - 32$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 512 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -2.8284271247461903 \qquad x_2 = 2.8284271247461903$$

     Et on sait que $4x^2 - 32$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2.8284271247461903		10
$4x^2 - 32$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.8284271247461903$ et $h = 22.627416997969 5224$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 6.1x - 2.6\right) e^{-x} + 2.6$$

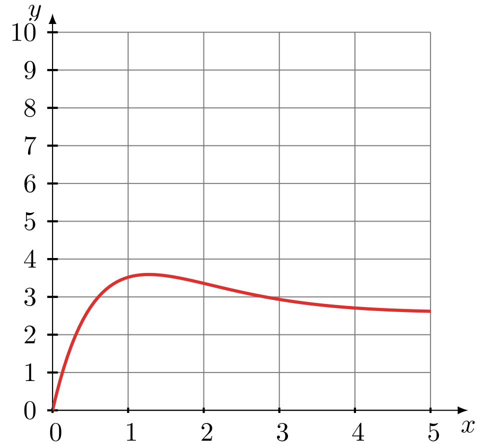
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

   $$F(x) = 2.6x + \left(x^2 - 4.1x - 1.5\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = 11.9 - \frac{1.9}{e^4}$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(11.9 - \frac{1.9}{e^4}) \times 4 \times 15^2 = 10679.00000$$

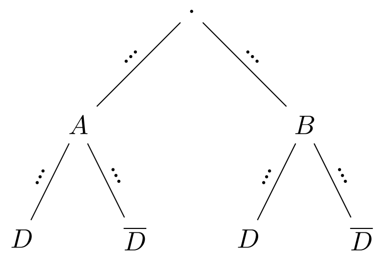
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 57.99999999999999 % des stylos, et parmi ceux-là, 5.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 14.000000000000002 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



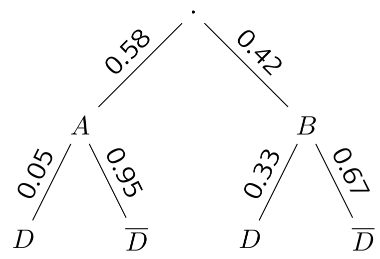
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.17.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 17.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 17)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2. - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
$$P(A) = 0.58$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
$$P(B) = 0.42$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
$$P_A(D) = 0.05$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
$$P(D \cap D) = 0.14$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.58 \times 0.05 = 0.03$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.03 + 0.14 = 0.17$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.03}{0.17} = 0.18$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 19$ et $p = 0.17$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
$$P(X = 17) = \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \end{pmatrix} \times 0.17^{17} \times 0.83^{2}$$

7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
$$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.17^{0} \times 0.83^{19}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
$$E[X] = n \times p = 19 \times 0.17 = 3.23$$

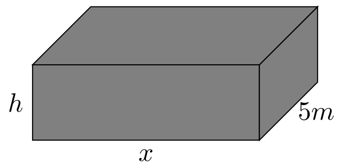
DM1 GERMAIN Margot

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $45m^3$. La longueur est aussi fixée à $5m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{9}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 10x + 18 + \frac{90}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{10x^2 + 18x + 90}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{10x^2 - 90}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 45$, h doit être égale à $9/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 45$, h doit être égale à $9/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 5 \\ 45 &= h \times x \times 5 \\ x &= \frac{45}{h \times 5} = \frac{9}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 5 \times 2 + h \times 5 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{9}{x} \times 2 + x \times 5 \times 2 + \frac{9}{x} \times 5 \times 2 \\ S(x) &= 10x + 18 + \frac{90}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 10x + 18 + \frac{90}{x} \\ S(x) &= \frac{10x \times x}{x} + \frac{18 \times x}{x} + \frac{90}{x} \\ S(x) &= \frac{10x^2 + 18x + 90}{x} \end{aligned}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 10x^2 + 18x + 90 \Rightarrow u'(x) = 20x + 18$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x) &= (20x+18)\times x - (10x^2+18x+90)\times 1 \\ &= 10x^2 - 90 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{10x^2-90}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $10x^2 - 90$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 3600 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$$

     Et on sait que $10x^2 - 90$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-3		10
$10x^2-90$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
x^2	$\parallel$	$+$		$+$	
S'	$\parallel$	$-$	0	$+$	
S	$\parallel$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 3$ et $h = 27$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 1.2x - 9.5\right)e^{-x} + 9.5$$

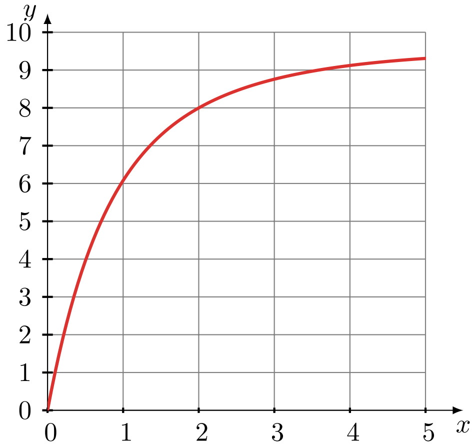
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

   $$F(x) = 9.5x + \left(x^2 + 0.8x + 10.3\right)e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{29.5}{e^4} + 27.7$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(\frac{29.5}{e^4} + 27.7) \times 4 \times 15^2 = 25416.00000$$

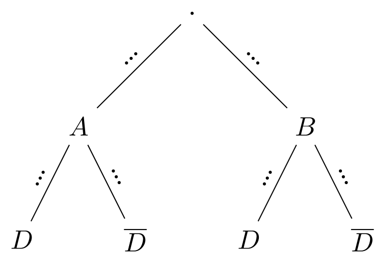
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 31.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 4.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 15.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



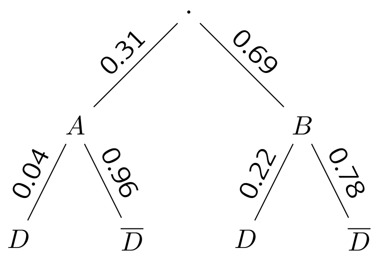
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.16.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 16.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 13)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

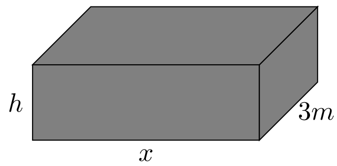
2. • Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
$$P(A) = 0.31$$
   • Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
$$P(B) = 0.69$$
   • Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
$$P_A(D) = 0.04$$
   • Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
$$P(D \cap D) = 0.15$$
3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.31 \times 0.04 = 0.01$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.01 + 0.15 = 0.16$$
4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.01}{0.16} = 0.06$$
5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 14$ et $p = 0.16$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
$$P(X = 13) = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} \times 0.16^{13} \times 0.84^{1}$$
7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
$$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.16^{0} \times 0.84^{14}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
$$E[X] = n \times p = 14 \times 0.16 = 2.24$$

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $21m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{7}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire

$$S(x) = 6x + 14 + \frac{42}{x}$$

4. Démontrer que

$$S(x) = \frac{6x^2 + 14x + 42}{x}$$

5. Démontrer que

$$S'(x) = \frac{6x^2 - 42}{x^2}$$

6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 21$, h doit être égale à $7/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 21$, h doit être égale à $7/3$
2. Pour calculer le volume, on a

$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 3 \\ 21 &= h \times x \times 3 \\ x &= \frac{21}{h \times 3} = \frac{7}{h} \end{aligned}$$

3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant

$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{7}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \frac{7}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) &= 6x + 14 + \frac{42}{x} \end{aligned}$$

4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur

$$\begin{aligned} S(x) &= 6x + 14 + \frac{42}{x} \\ S(x) &= \frac{6x \times x}{x} + \frac{14 \times x}{x} + \frac{42}{x} \\ S(x) &= \frac{6x^2 + 14x + 42}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 6x^2 + 14x + 42 \Rightarrow u'(x) = 12x + 14$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x) &= (12x+14)\times x - (6x^2+14x+42)\times 1 \\ &= 6x^2 - 42 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{6x^2-42}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $6x^2-42$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 1008 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -2.6457513110645907 \qquad x_2 = 2.6457513110645907$$

     Et on sait que $6x^2-42$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2.6457513110645907		10
$6x^2-42$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
S'	||	$-$	0	$+$	
S	||	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.6457513110645907$ et $h = 18.5202591774521349$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2+2.6x-4.1\right)e^{-x} + 4.1$$

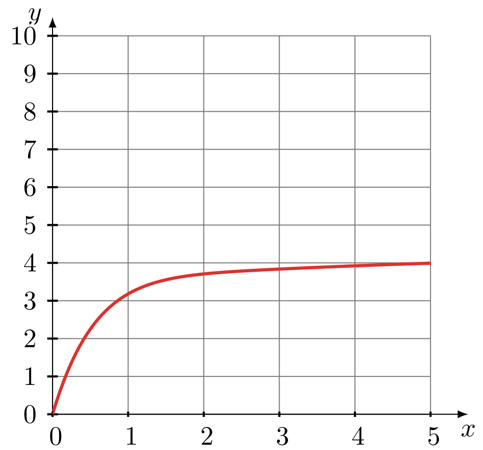
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

   $$F(x) = 4.1x + \left(x^2-0.6x+3.5\right)e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \dfrac{17.1}{e^4} + 12.9$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(\frac{17.1}{e^4} + 12.9) \times 4 \times 15^2 = 11892.00000$$

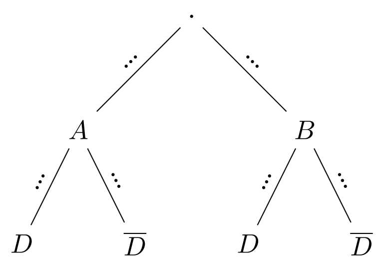
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 26.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 60.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 74.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.

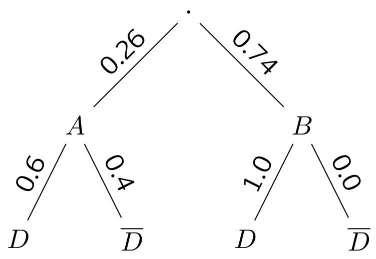
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.9.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 90.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 13)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2.
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.26$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.74$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.6$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.74$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.26 \times 0.6 = 0.16$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.16 + 0.74 = 0.9$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.16}{0.9} = 0.18$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0.9$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 13) = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix} \times 0.9^{13} \times 0.1^2$$
7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.9^0 \times 0.1^{15}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 15 \times 0.9 = 13.5$$

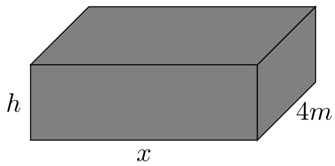
DM1 KICHENASSAMY Kévin

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $16m^3$. La longueur est aussi fixée à $4m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{4}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 8x + 8 + \frac{32}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{8x^2 + 8x + 32}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{8x^2 - 32}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 16$, h doit être égale à $4/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 16$, h doit être égale à $4/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 4 \\ 16 & = & h \times x \times 4 \\ x & = & \dfrac{16}{h \times 4} = \dfrac{4}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 4 \times 2 + h \times 4 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{4}{x} \times 2 + x \times 4 \times 2 + \dfrac{4}{x} \times 4 \times 2 \\ S(x) & = & 8x + 8 + \dfrac{32}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 8x + 8 + \dfrac{32}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{8x \times x}{x} + \dfrac{8 \times x}{x} + \dfrac{32}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{8x^2 + 8x + 32}{x} \end{array}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 8x^2 + 8x + 32 \Rightarrow u'(x) = 16x + 8$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (16x + 8) \times x - (8x^2 + 8x + 32) \times 1 \\ &= 8x^2 - 32 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{8x^2 - 32}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $8x^2 - 32$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 1024 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$$

     Et on sait que $8x^2 - 32$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2		10
$8x^2 - 32$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
S'	||	$-$	0	$+$	
S	||	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2$ et $h = 8$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 8.1x - 0.8\right) e^{-x} + 0.8$$

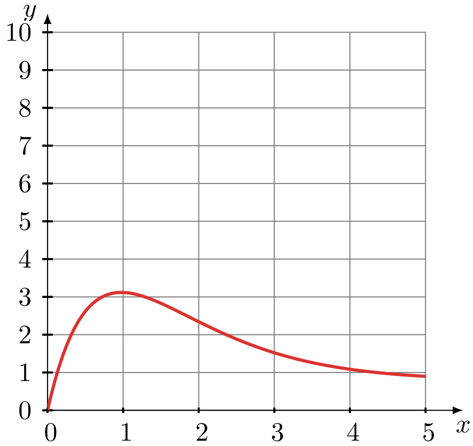
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x) = 0.8x + \left(x^2 - 6.1x - 5.3\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

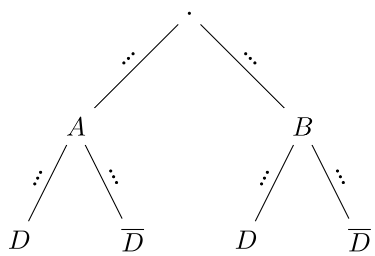
2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = 8.5 - \frac{13.7}{e^4}$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(8.5 - \frac{13.7}{e^4}) \times 4 \times 15^2 = 7424.000000$$

Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 68.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 79.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 26.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :



- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »

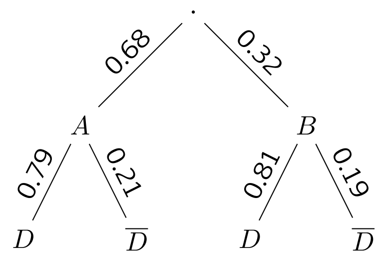
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.8.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 80.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 12)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2.
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.68$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.32$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.79$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.26$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.68 \times 0.79 = 0.54$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.54 + 0.26 = 0.8$$

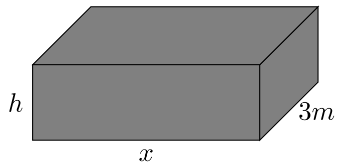
4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.54}{0.8} = 0.68$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0.8$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 12) = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} \times 0.8^{12} \times 0.2^{4}$$

7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.8^{0} \times 0.2^{16}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 16 \times 0.8 = 12.8$$

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière



On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $24m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.

1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{8}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 6x + 16 + \frac{48}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{6x^2 + 16x + 48}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{6x^2 - 48}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 24$, h doit être égale à $8/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 24$, h doit être égale à $8/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V &=& h \times x \times 3 \\ 24 &=& h \times x \times 3 \\ x &=& \frac{24}{h \times 3} = \frac{8}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) &=& x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) &=& x \times \frac{8}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \frac{8}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) &=& 6x + 16 + \frac{48}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) &=& 6x + 16 + \frac{48}{x} \\ S(x) &=& \frac{6x \times x}{x} + \frac{16 \times x}{x} + \frac{48}{x} \\ S(x) &=& \frac{6x^2 + 16x + 48}{x} \end{array}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 6x^2 + 16x + 48 \Rightarrow u'(x) = 12x + 16$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x) &= (12x+16)\times x-(6x^2+16x+48)\times 1 \\ &= 6x^2-48 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x)=\frac{6x^2-48}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
- Signe de $6x^2-48$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 1152 > 0$$

  Il y a donc 2 racines

$$x_1=-2.82842712474619 \qquad x_2=2.82842712474619$$

  Et on sait que $6x^2-48$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-2.82842712474619		10
$6x^2-48$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
S'	||	$-$	0	$+$	
S	||	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x=2.82842712474619$ et $h=22.62741699796952$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x)=\left(-x^2+5.6x-1.3\right)e^{-x}+1.3$$

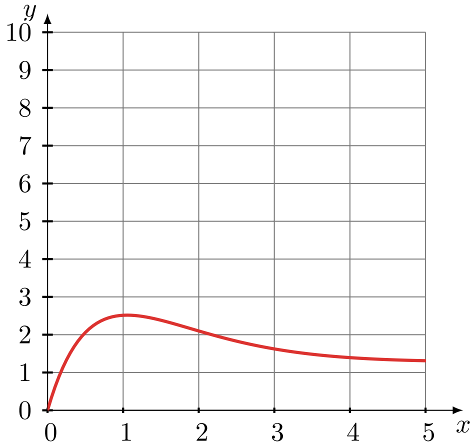
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x)=1.3x+\left(x^2-3.6x-2.3\right)e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = 7.5 - \frac{0.6999999999999999}{e^4}$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(7.5 - \frac{0.6999999999999999}{e^4}) \times 4 \times 15^2 = 6738.000000$$

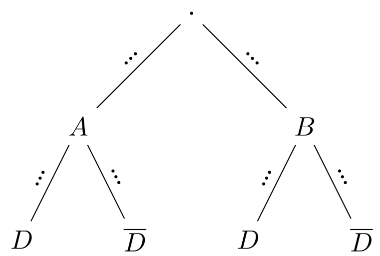
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 53.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 59.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 7.000000000000001 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



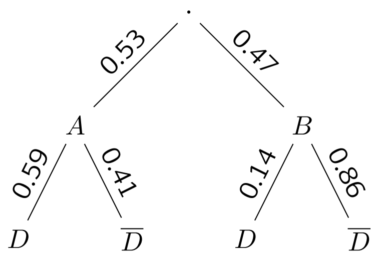
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.38.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 38.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 7)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2.
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.53$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.47$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.59$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.07$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.53 \times 0.59 = 0.31$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.31 + 0.07 = 0.38$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.31}{0.38} = 0.82$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0.38$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 7) = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix} \times 0.38^7 \times 0.62^5$$

7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.38^0 \times 0.62^{12}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 12 \times 0.38 = 4.56$$

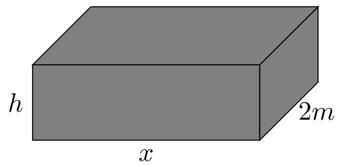
DM1 MOLINIER Annelise

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $20m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{10}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 20 + \frac{40}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 20x + 40}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{4x^2 - 40}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 20$, h doit être égale à $10/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 20$, h doit être égale à $10/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 2 \\ 20 & = & h \times x \times 2 \\ x & = & \dfrac{20}{h \times 2} = \dfrac{10}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{10}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \dfrac{10}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & 4x + 20 + \dfrac{40}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 4x + 20 + \dfrac{40}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x \times x}{x} + \dfrac{20 \times x}{x} + \dfrac{40}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x^2 + 20x + 40}{x} \end{array}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 4x^2 + 20x + 40 \Rightarrow u'(x) = 8x + 20$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (8x+20) \times x - (4x^2+20x+40) \times 1 \\ &= 4x^2 - 40 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{4x^2-40}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $4x^2 - 40$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 640 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -3.1622776601683795 \qquad x_2 = 3.1622776601683795$$

     Et on sait que $4x^2 - 40$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-3.1622776601683795		10
$4x^2-40$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
S'	||	$-$	0	$+$	
S	||	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 3.1622776601683795$ et $h = 31.6227766016837950$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 5.1x - 3.5\right) e^{-x} + 3.5$$

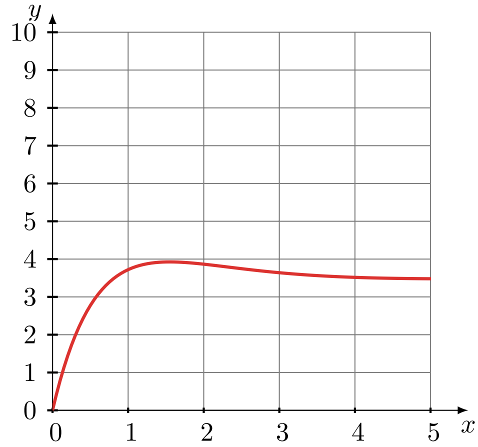
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

   $$F(x) = 3.5x + \left(x^2 - 3.1x + 0.4\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\, dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{4.0}{e^4} + 13.6$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à

$$\left(\frac{4.0}{e^4} + 13.6\right) \times 4 \times 15^2 = 12306.00000$$

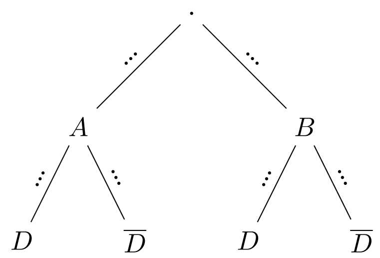
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 52.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 81.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 31.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



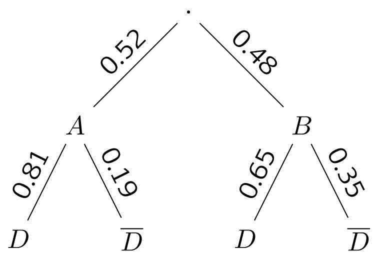
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.73.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 73.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 6)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2.
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.52$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.48$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.81$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.31$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.52 \times 0.81 = 0.42$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.42 + 0.31 = 0.73$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.42}{0.73} = 0.58$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.73$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 6) = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \times 0.73^6 \times 0.27^4$$

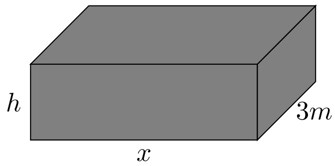
7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.73^0 \times 0.27^{10}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 10 \times 0.73 = 7.3$$

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $9m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{3}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 6x + 6 + \frac{18}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{6x^2 + 6x + 18}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{6x^2 - 18}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 9$, h doit être égale à $3/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 9$, h doit être égale à $3/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V &=& h \times x \times 3 \\ 9 &=& h \times x \times 3 \\ x &=& \dfrac{9}{h \times 3} = \dfrac{3}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) &=& x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) &=& x \times \dfrac{3}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \dfrac{3}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) &=& 6x + 6 + \dfrac{18}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) &=& 6x + 6 + \dfrac{18}{x} \\ S(x) &=& \dfrac{6x \times x}{x} + \dfrac{6 \times x}{x} + \dfrac{18}{x} \\ S(x) &=& \dfrac{6x^2 + 6x + 18}{x} \end{array}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 6x^2 + 6x + 18 \Rightarrow u'(x) = 12x + 6$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (12x + 6) \times x - (6x^2 + 6x + 18) \times 1 \\ &= 6x^2 - 18 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{6x^2 - 18}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $6x^2 - 18$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 432 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -1.7320508075688774 \qquad x_2 = 1.7320508075688774$$

Et on sait que $6x^2 - 18$ est du signe de a donc positif en dehors des racines

- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-1.7320508075688774		10
$6x^2 - 18$	$\|$	$-$	0	$+$	
x^2	$\|$	$+$		$+$	
S'	$\|$	$-$	0	$+$	
S	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.7320508075688774$ et $h = 5.1961524227066322$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 7.0x - 7.2\right)e^{-x} + 7.2$$

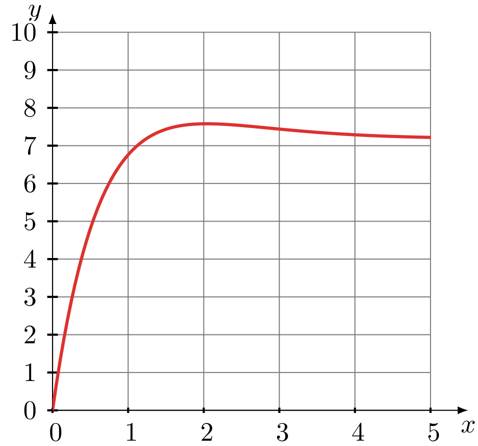
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x) = 7.2x + \left(x^2 - 5.0x + 2.2\right)e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = 26.6 - \frac{1.8}{e^4}$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à

$$(26.6 - \frac{1.8}{e^4}) \times 4 \times 15^2 = 23910.00000$$

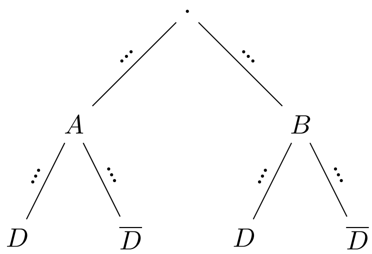
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cette exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 57.99999999999999 % des stylos, et parmi ceux-là, 48.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 11.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



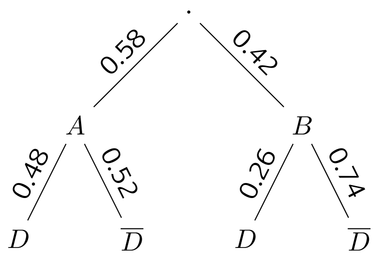
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.39.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 39.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 11)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2. - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
$$P(A) = 0.58$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
$$P(B) = 0.42$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
$$P_A(D) = 0.48$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
$$P(D \cap D) = 0.11$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.58 \times 0.48 = 0.28$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.28 + 0.11 = 0.39$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.28}{0.39} = 0.72$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.39$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
$$P(X = 11) = \left(\begin{array}{c} 20 \\ 11 \end{array} \right) \times 0.39^{11} \times 0.61^{9}$$

7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
$$P(X = 0) = \left(\begin{array}{c} 20 \\ 0 \end{array} \right) \times 0.39^{0} \times 0.61^{20}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
$$E[X] = n \times p = 20 \times 0.39 = 7.8$$

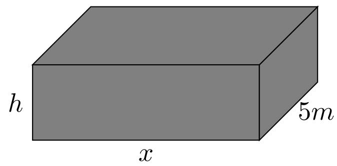
DM1 PERDRIX Camille

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $30m^3$. La longueur est aussi fixée à $5m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{6}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire

$$S(x) = 10x + 12 + \frac{60}{x}$$

4. Démontrer que

$$S(x) = \frac{10x^2 + 12x + 60}{x}$$

5. Démontrer que

$$S'(x) = \frac{10x^2 - 60}{x^2}$$

6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 30$, h doit être égale à $6/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 30$, h doit être égale à $6/3$
2. Pour calculer le volume, on a

$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 5 \\ 30 & = & h \times x \times 5 \\ x & = & \dfrac{30}{h \times 5} = \dfrac{6}{h} \end{array}$$

3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 5 \times 2 + h \times 5 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{6}{x} \times 2 + x \times 5 \times 2 + \dfrac{6}{x} \times 5 \times 2 \\ S(x) & = & 10x + 12 + \dfrac{60}{x} \end{array}$$

4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 10x + 12 + \dfrac{60}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{10x \times x}{x} + \dfrac{12 \times x}{x} + \dfrac{60}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{10x^2 + 12x + 60}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 10x^2 + 12x + 60 \Rightarrow u'(x) = 20x + 12$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (20x+12) \times x - (10x^2+12x+60) \times 1 \\ &= 10x^2 - 60 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{10x^2-60}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $10x^2 - 60$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 2400 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -2.449489742783178 \qquad x_2 = 2.449489742783178$$

     Et on sait que $10x^2 - 60$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2.449489742783178		10
$10x^2-60$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
S'	||	$-$	0	$+$	
S	||	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.449489742783178$ et $h = 14.696938456699068$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 6.1x - 9.6\right) e^{-x} + 9.6$$

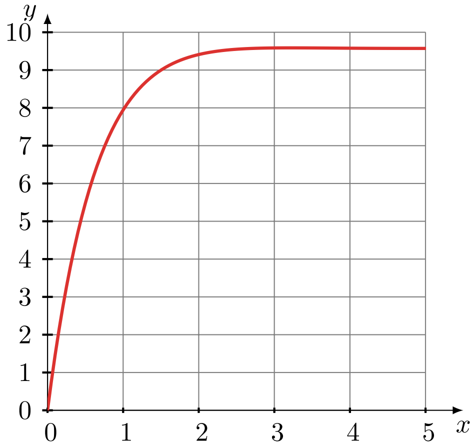
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x) = 9.6x + \left(x^2 - 4.1x + 5.5\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{5.1}{e^4} + 32.9$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$\left(\frac{5.1}{e^4} + 32.9\right) \times 4 \times 15^2 = 29694.00000$$

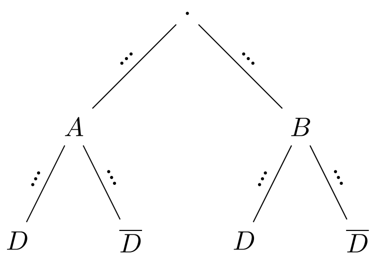
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 12.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 55.00000000000001 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 81.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



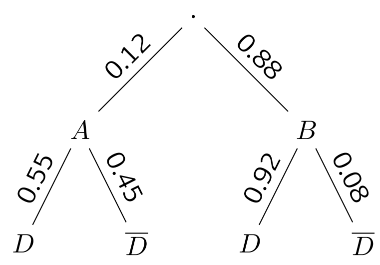
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.88.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 88.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 8)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2.
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.12$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.88$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.55$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.81$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.12 \times 0.55 = 0.07$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.07 + 0.81 = 0.88$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.07}{0.88} = 0.08$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0.88$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 8) = \binom{15}{8} \times 0.88^8 \times 0.12^7$$
7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \binom{15}{0} \times 0.88^0 \times 0.12^{15}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 15 \times 0.88 = 13.2$$

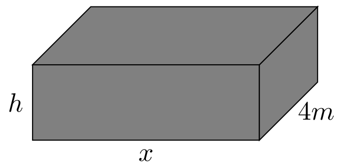
DM1 POISON Lorette

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $16m^3$. La longueur est aussi fixée à $4m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{4}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 8x + 8 + \frac{32}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{8x^2 + 8x + 32}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{8x^2 - 32}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 16$, h doit être égale à $4/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 16$, h doit être égale à $4/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 4 \\ 16 &= h \times x \times 4 \\ x &= \frac{16}{h \times 4} = \frac{4}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 4 \times 2 + h \times 4 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{4}{x} \times 2 + x \times 4 \times 2 + \frac{4}{x} \times 4 \times 2 \\ S(x) &= 8x + 8 + \frac{32}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 8x + 8 + \frac{32}{x} \\ S(x) &= \frac{8x \times x}{x} + \frac{8 \times x}{x} + \frac{32}{x} \\ S(x) &= \frac{8x^2 + 8x + 32}{x} \end{aligned}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 8x^2 + 8x + 32 \Rightarrow u'(x) = 16x + 8$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (16x+8) \times x - (8x^2+8x+32) \times 1 \\ &= 8x^2 - 32 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{8x^2 - 32}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $8x^2 - 32$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 1024 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$$

     Et on sait que $8x^2 - 32$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2		10
$8x^2 - 32$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2$ et $h = 8$.

Exercice 2 Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 6.8x - 6.4\right) e^{-x} + 6.4$$

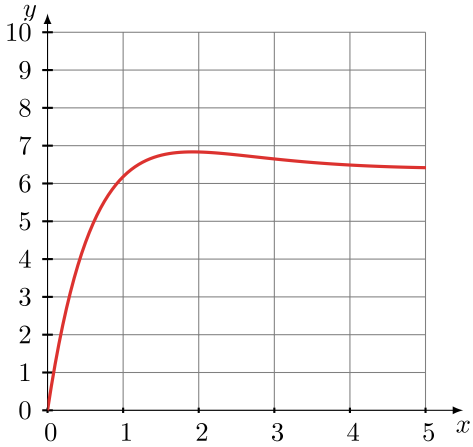
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

   $$F(x) = 6.4x + \left(x^2 - 4.8x + 1.6\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = 24.0 - \frac{1.6}{e^4}$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à

$$(24.0 - \frac{1.6}{e^4}) \times 4 \times 15^2 = 21574.00000$$

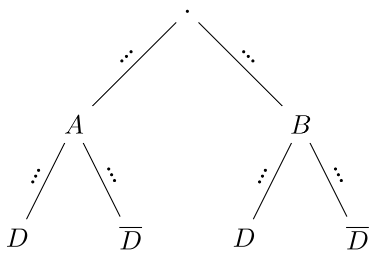
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 61.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 21.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 37.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



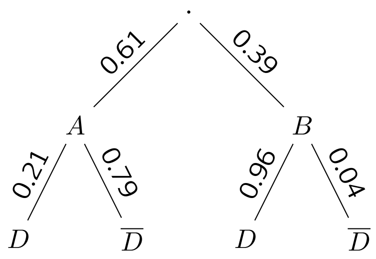
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.5.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 50.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 10)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2. - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.61$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.39$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.21$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.37$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.61 \times 0.21 = 0.13$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.13 + 0.37 = 0.5$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.13}{0.5} = 0.26$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.5$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 10) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 10 \end{array} \right) \times 0.5^{10} \times 0.5^{0}$$
7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right) \times 0.5^{0} \times 0.5^{10}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 10 \times 0.5 = 5.0$$

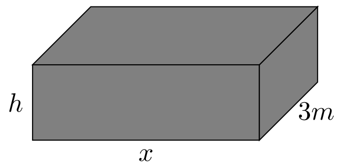
DM1 RODRIGUEZ Teddy

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $24m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{8}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 6x + 16 + \frac{48}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{6x^2 + 16x + 48}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{6x^2 - 48}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 24$, h doit être égale à $8/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 24$, h doit être égale à $8/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 3 \\ 24 &= h \times x \times 3 \\ x &= \frac{24}{h \times 3} = \frac{8}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{8}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \frac{8}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) &= 6x + 16 + \frac{48}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 6x + 16 + \frac{48}{x} \\ S(x) &= \frac{6x \times x}{x} + \frac{16 \times x}{x} + \frac{48}{x} \\ S(x) &= \frac{6x^2 + 16x + 48}{x} \end{aligned}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 6x^2 + 16x + 48 \Rightarrow u'(x) = 12x + 16$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (12x+16) \times x - (6x^2+16x+48) \times 1 \\ &= 6x^2 - 48 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{6x^2-48}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $6x^2 - 48$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 1152 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -2.82842712474619 \qquad x_2 = 2.82842712474619$$

     Et on sait que $6x^2 - 48$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2.82842712474619		10
$6x^2-48$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$		$+$	
S'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
S	$\Vert$	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.82842712474619$ et $h = 22.62741699796952$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 3.8x - 4.0\right) e^{-x} + 4.0$$

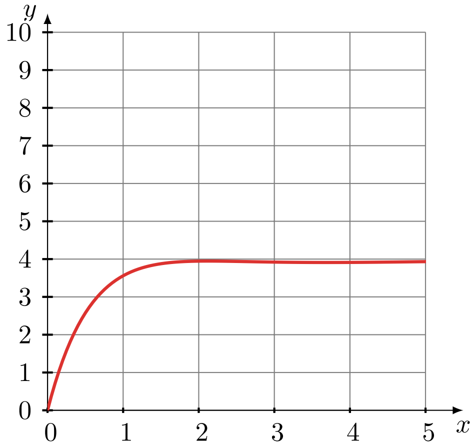
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x) = 4.0x + \left(x^2 - 1.8x + 2.2\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{11.0}{e^4} + 13.8$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(\frac{11.0}{e^4} + 13.8) \times 4 \times 15^2 = 12601.00000$$

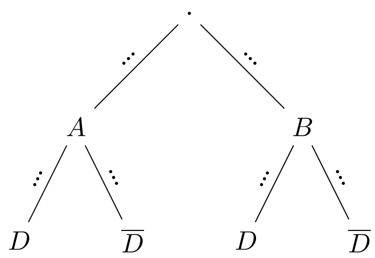
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 56.99999999999999 % des stylos, et parmi ceux-là, 6.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 42.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



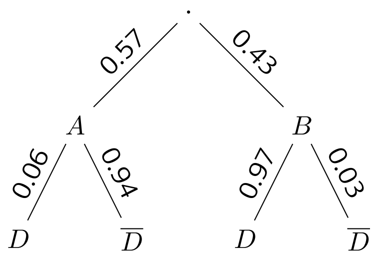
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.45.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 45.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 8)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2.
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.57$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.43$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.06$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.42$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.57 \times 0.06 = 0.03$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.03 + 0.42 = 0.45$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.03}{0.45} = 0.07$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0.45$.

6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 8) = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} \times 0.45^8 \times 0.55^3$$

7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.45^0 \times 0.55^{11}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.

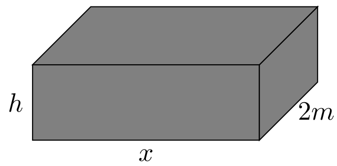
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 11 \times 0.45 = 4.95$$

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $8m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{4}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 8 + \frac{16}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 8x + 16}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{4x^2 - 16}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 8$, h doit être égale à $4/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 8$, h doit être égale à $4/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 2 \\ 8 &= h \times x \times 2 \\ x &= \frac{8}{h \times 2} = \frac{4}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{4}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \frac{4}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) &= 4x + 8 + \frac{16}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 4x + 8 + \frac{16}{x} \\ S(x) &= \frac{4x \times x}{x} + \frac{8 \times x}{x} + \frac{16}{x} \\ S(x) &= \frac{4x^2 + 8x + 16}{x} \end{aligned}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 4x^2 + 8x + 16 \Rightarrow u'(x) = 8x + 8$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (8x+8) \times x - (4x^2+8x+16) \times 1 \\ &= 4x^2 - 16 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{4x^2-16}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $4x^2 - 16$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 256 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$$

     Et on sait que $4x^2 - 16$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2		10
$4x^2-16$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2$ et $h = 8$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 2.5x - 6.7\right) e^{-x} + 6.7$$

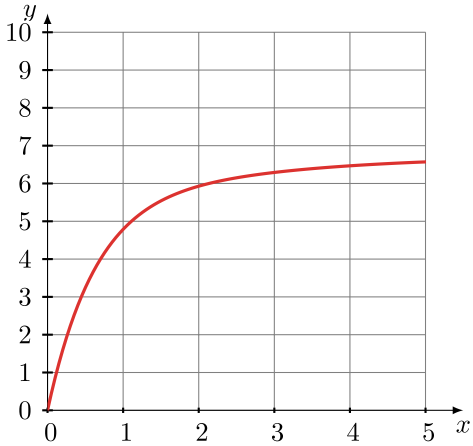
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x) = 6.7x + \left(x^2 - 0.5x + 6.2\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{20.2}{e^4} + 20.6$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(\frac{20.2}{e^4} + 20.6) \times 4 \times 15^2 = 18873.00000$$

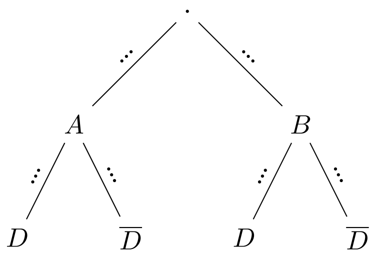
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cette exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 99.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 28.000000000000004 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 1.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



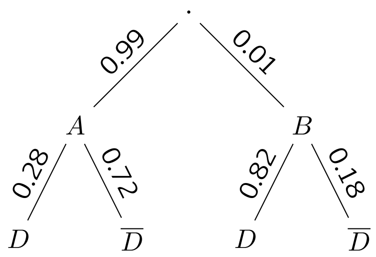
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.29.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 28.999999999999996 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 9)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2.
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.99$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.01$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.28$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.01$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.99 \times 0.28 = 0.28$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.28 + 0.01 = 0.29$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.28}{0.29} = 0.97$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.29$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 9) = \binom{10}{9} \times 0.29^9 \times 0.71^1$$

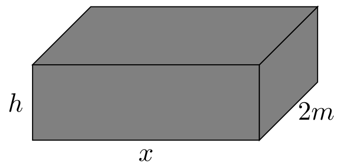
7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0.29^0 \times 0.71^{10}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 10 \times 0.29 = 2.9$$

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $4m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{2}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 4 + \frac{8}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 4x + 8}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{4x^2 - 8}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 4$, h doit être égale à $2/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 4$, h doit être égale à $2/3$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 2 \\ 4 & = & h \times x \times 2 \\ x & = & \dfrac{4}{h \times 2} = \dfrac{2}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{2}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \dfrac{2}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & 4x + 4 + \dfrac{8}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 4x + 4 + \dfrac{8}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x \times x}{x} + \dfrac{4 \times x}{x} + \dfrac{8}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x^2 + 4x + 8}{x} \end{array}$$
5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 4x^2 + 4x + 8 \Rightarrow u'(x) = 8x + 4$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (8x+4) \times x - (4x^2+4x+8) \times 1 \\ &= 4x^2 - 8 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{4x^2 - 8}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $4x^2 - 8$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 128 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -1.4142135623730951 \qquad x_2 = 1.4142135623730951$$

     Et on sait que $4x^2 - 8$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-1.4142135623730951		10
$4x^2 - 8$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
S'	||	$-$	0	$+$	
S	||	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.4142135623730951$ et $h = 2.8284271247461902$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 2.2x - 5.8\right) e^{-x} + 5.8$$

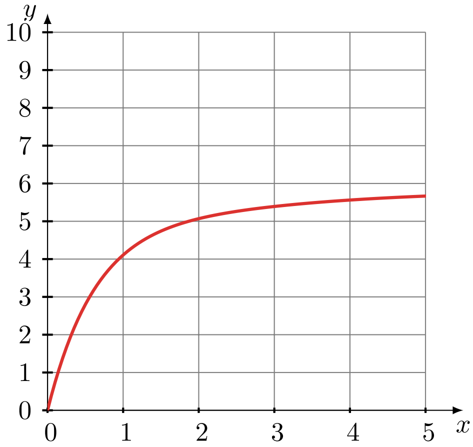
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

   $$F(x) = 5.8x + \left(x^2 - 0.2x + 5.6\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

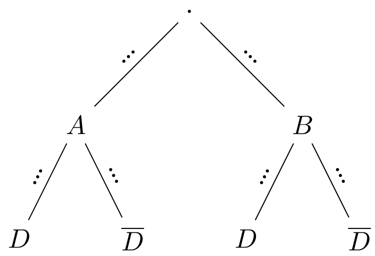
2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{20.8}{e^4} + 17.6$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$(\frac{20.8}{e^4} + 17.6) \times 4 \times 15^2 = 16183.00000$$

Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 93.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 62.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 1.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :



- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »

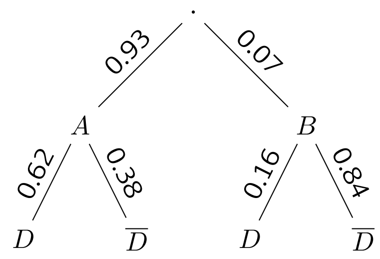
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.59.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 59.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 11)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2.
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
$$P(A) = 0.93$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
$$P(B) = 0.07$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
$$P_A(D) = 0.62$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
$$P(D \cap D) = 0.01$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.93 \times 0.62 = 0.58$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.58 + 0.01 = 0.59$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.58}{0.59} = 0.98$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 13$ et $p = 0.59$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
$$P(X = 11) = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix} \times 0.59^{11} \times 0.41^{2}$$

7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
$$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.59^{0} \times 0.41^{13}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
$$E[X] = n \times p = 13 \times 0.59 = 7.67$$

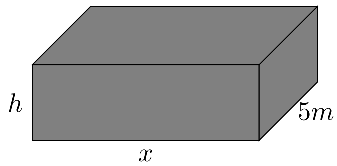
DM1 SILVA LOPES Katleen

Maths complémentaires – **À render pour le jeudi 27 mai**

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $10m^3$. La longueur est aussi fixée à $5m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{2}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire

$$S(x) = 10x + 4 + \frac{20}{x}$$

4. Démontrer que

$$S(x) = \frac{10x^2 + 4x + 20}{x}$$

5. Démontrer que

$$S'(x) = \frac{10x^2 - 20}{x^2}$$

6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 10$, h doit être égale à $2/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 10$, h doit être égale à $2/3$
2. Pour calculer le volume, on a

$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 5 \\ 10 &= h \times x \times 5 \\ x &= \frac{10}{h \times 5} = \frac{2}{h} \end{aligned}$$

3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant

$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 5 \times 2 + h \times 5 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{2}{x} \times 2 + x \times 5 \times 2 + \frac{2}{x} \times 5 \times 2 \\ S(x) &= 10x + 4 + \frac{20}{x} \end{aligned}$$

4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur

$$\begin{aligned} S(x) &= 10x + 4 + \frac{20}{x} \\ S(x) &= \frac{10x \times x}{x} + \frac{4 \times x}{x} + \frac{20}{x} \\ S(x) &= \frac{10x^2 + 4x + 20}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 10x^2 + 4x + 20 \Rightarrow u'(x) = 20x + 4$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (20x+4) \times x - (10x^2+4x+20) \times 1 \\ &= 10x^2 - 20 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{10x^2 - 20}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $10x^2 - 20$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 800 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -1.4142135623730951 \qquad x_2 = 1.4142135623730951$$

     Et on sait que $10x^2 - 20$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-1.4142135623730951		10
$10x^2 - 20$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
S'	||	$-$	0	$+$	
S	||	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.4142135623730951$ et $h = 2.8284271247461902$.

Exercice 2 Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 4.3x - 6.7\right) e^{-x} + 6.7$$

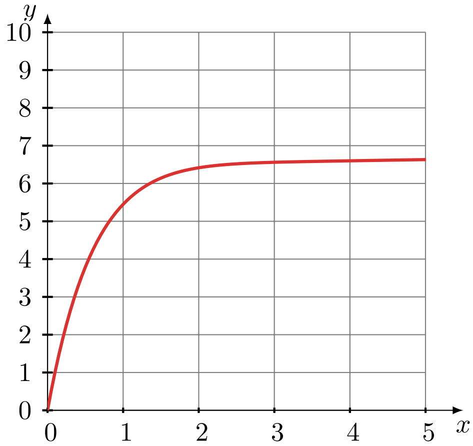
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

   $$F(x) = 6.7x + \left(x^2 - 2.3x + 4.4\right) e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{11.2}{e^4} + 22.4$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à
$$\left(\frac{11.2}{e^4} + 22.4\right) \times 4 \times 15^2 = 20345.00000$$

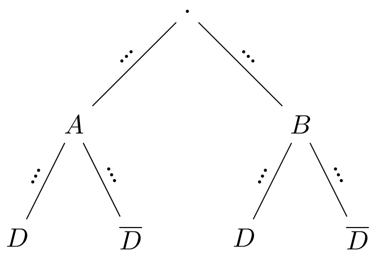
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cette exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 24.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 52.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 71.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



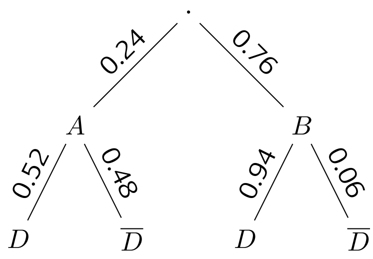
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.83.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 83.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 12)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

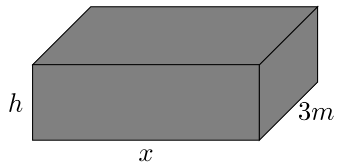
1. 

2. - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.24$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.76$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.52$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.71$$
3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.24 \times 0.52 = 0.12$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.12 + 0.71 = 0.83$$
4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.12}{0.83} = 0.14$$
5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 18$ et $p = 0.83$.
6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 12) = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix} \times 0.83^{12} \times 0.17^{6}$$
7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.83^{0} \times 0.17^{18}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.
8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 18 \times 0.83 = 14.94$$

Les valeurs des exercices sont générés automatiquement. Si une valeur a un nombre adhérant de chiffres après la virgule, vous pouvez l'arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $27m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{9}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire

$$S(x) = 6x + 18 + \frac{54}{x}$$

4. Démontrer que

$$S(x) = \frac{6x^2 + 18x + 54}{x}$$

5. Démontrer que

$$S'(x) = \frac{6x^2 - 54}{x^2}$$

6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 27$, h doit être égale à $9/2$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 27$, h doit être égale à $9/3$
2. Pour calculer le volume, on a

$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 3 \\ 27 & = & h \times x \times 3 \\ x & = & \dfrac{27}{h \times 3} = \dfrac{9}{h} \end{array}$$

3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{9}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \dfrac{9}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) & = & 6x + 18 + \dfrac{54}{x} \end{array}$$

4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 6x + 18 + \dfrac{54}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{6x \times x}{x} + \dfrac{18 \times x}{x} + \dfrac{54}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{6x^2 + 18x + 54}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 6x^2 + 18x + 54 \Rightarrow u'(x) = 12x + 18$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x) &= (12x+18)\times x - (6x^2+18x+54)\times 1 \\ &= 6x^2-54 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{6x^2-54}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $6x^2-54$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 1296 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$$

     Et on sait que $6x^2-54$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-3		10
$6x^2 - 54$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$		$+$	
S'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
S	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 3$ et $h = 27$.

Exercice 2 — Bassin

Le tour d'un bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;4]$ où f est la fonction définie par

$$f(x) = \left(-x^2 + 2.3x - 7.0\right)e^{-x} + 7.0$$

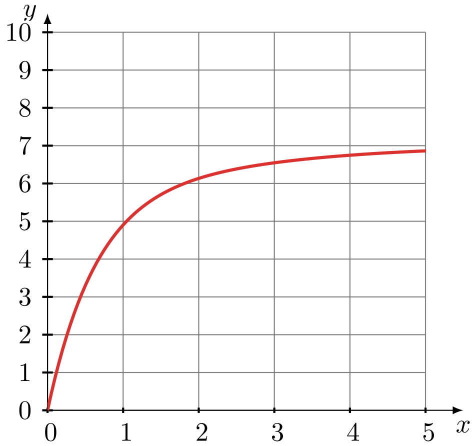
On admet que sur $[0\,;4]$ la fonction f est positive.

1. Sur un repère, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de symétries puis compléter pour dessiner la forme du bassin.
2. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x) = 7.0x + \left(x^2 - 0.3x + 6.7\right)e^{-x}$$

3. Calculer la quantité $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, vous donnerez le résultat sous forme exacte. Interpréter le résultat et reportez cette quantité sur le graphique.
4. On considère que l'échelle de votre graphique est de 1unité pour 15m. Calculer l'aire du bassin. Vous donnerez un résultat arrondi au m^2 près.

Solution 2

1. 

2. Il faut dériver $F(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{21.5}{e^4} + 21.3$
4. La quantité calculée à la question précédente se retrouve 4fois pour former le bassin. Il faut ensuite prendre en compte l'échelle, comme 1unité de longueur correspond à 15m, une unité d'air correspond à $15 \times 15 = 225m^2$. Ainsi l'aire du bassin est égale à

$$\left(\frac{21.5}{e^4} + 21.3\right) \times 4 \times 15^2 = 19524.00000$$

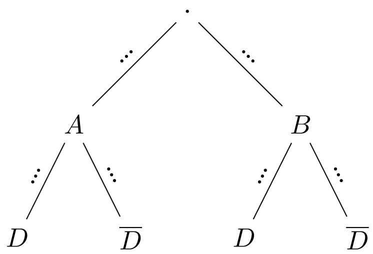
Exercice 3 — Stylos

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.
L'atelier A fabrique 43.0 % des stylos, et parmi ceux-là, 9.0 % possèdent un défaut de fabrication.
De plus, 27.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B.
Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »
- B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »
- D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »



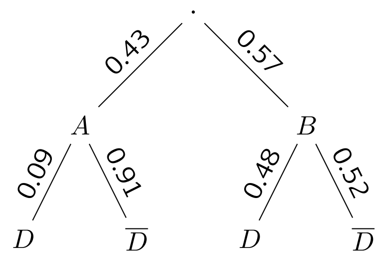
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre
2. Interpréter puis donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.
3. (a) Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
   (b) En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0.31.
4. On prélève un stylo au hasard avec un défaut. Quelle est la probabilité qu'il vienne de l'atelier A ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 31.0 % des stylos possèdent un défaut de fabrication.
L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 4 stylos.
Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.
On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

5. Avec quelle loi peut-on modéliser X. Préciser les paramètres.
6. Calculer et interpréter la probabilité $P(X = 10)$.
7. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?
8. Combien de stylos peut-on espérer avoir en moyenne ?

Solution 3

1. 

2.
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier A
   $$P(A) = 0.43$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B
   $$P(B) = 0.57$$
   - Probabilité que le stylo ait un défaut sachant qu'il vient de l'atelier A.
   $$P_A(D) = 0.09$$
   - Probabilité que le stylo vienne de l'atelier B et qu'il ait un défaut.
   $$P(D \cap D) = 0.27$$

3. (a) Probabilité qu'un stylo vienne de l'atelier A et qu'il ait un defaut
   $$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.43 \times 0.09 = 0.04$$
   (b) Probabilité que le stylo ai un défaut de fabrication.
   $$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.04 + 0.27 = 0.31$$

4. Probabilité qu'il vienne de l'atelier A sachant qu'il a un defaut
   $$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.04}{0.31} = 0.13$$

5. X peut être modélisée par une loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0.31$.

6. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   $$P(X = 10) = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix} \times 0.31^{10} \times 0.69^{1}$$

7. (*par de correction automatique disponible pour le résultat final*
   Il faut calculer la probabilité qu'il y ait 0 stylo avec un defaut.
   $$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0.31^{0} \times 0.69^{11}$$
   Puis comparer ce nombre à 0,5.

8. Il faut calculer l'espérance
   $$E[X] = n \times p = 11 \times 0.31 = 3.41$$