Exercice 1 — Étude de signe d'un polynôme factorisé

Tracer le tableau de signe des polynômes suivants

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $g(x) = 4(-x + 2)$
3. $h(x) = -3(4 - 5x)$
4. $i(x) = (2x - 1)(3x + 2)$
5. $j(x) = (5x + 3)(-2x - 6)$
6. $k(x) = 0.5(4x - 12)(-x + 1)$
7. $l(x) = 3(x + 2)(x - 5)$
8. $m(x) = -2(-x + 2)(-2x + 2)$
9. $n(x) = -0.1(6x - 5)(0.2x + 2)$

Exercice 2 — Étude des variations d'un polynôme de degré 3 pas à pas

On cherche à étudier les variations de la fonction suivante

$$f(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x + 1$$

1. Dériver la fonction $f(x)$ et démontrer que $f'(x) = 3(x - 1)(x + 2)$
2. Tracer la tableau de signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de $f(x)$.
3. La fonction admet-elle un minimum ? Un maximum ?

Exercice 3 — Profit masqués

Un usine produit chaque jours entre 0 et 50 milles masques. Une étude statistique a montré que les bénéfices pouvaient être modélisés par la fonction suivante :

$$f(x) = x^3 - 96x^2 + 2489,25x - 10\,171{,}25$$

1. Démontrer que $f(x) = (x - 5)(x - 39,5)(x - 51,5)$.
2. Étudier le signe de $f(x)$.
3. En déduire le nombre de masque que l'entreprise doit produire pour gagner de l'argent.

Exercice 4 — Vienoiseries

Un artisan produit et vend des sachets de viennoiseries. En notant, x le nombre de sachets de viennoiseries ses coûts sont calculables avec la formule suivante :

$$C(x) = x^3 - 120x^2 + 10x$$

1. Calculer le coût de production pour 75 sachets.
2. Chaque sachet est vendu 10€. On rappelle que les bénéfices se calculent en faisant la différence (la soustraction) des recettes et des coûts.
   (a) On suppose que l'on vend 50 lots. Calculer les recettes, les coûts puis les bénéfices.
   (b) Justifier que le bénéfice se calcule alors avec la formule suivante :
   $$B(x) = -x^3 + 120x^2$$
   (c) Démontrer que $B(x)$ peut s'écrire
   $$B(x) = x^2(120 - x)$$
   (d) Étudier le signe de $B(x)$.
   (e) En déduire la production maximal avant que l'artisan commence à perdre de l'argent.
3. Recherche du maximum des bénéfices.
   (a) Déterminer $B'(x)$ la dérivée de $B(x)$.
   (b) Montrer que l'on peut écrire
   $$B'(x) = 3x(80 - x)$$
   (c) Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de $B(x)$.
   (d) En déduire le nombre de sachet que l'artisan doit produire pour maximiser ses bénéfices.