

Logarithme et équation puissance - Cours

- décembre 2020

1 Question de seuil

Il est souvent pertinent de chercher la valeur de x à partir de laquelle une fonction va dépasser ou passer en dessous une certaine valeur. On appelle cela un **seuil**.

Par exemple, dans l'exercice *économie d'échelle*, le coût unitaire est donné par la fonction $f(x) = 200 \times 10^{-0.1x}$ et l'on se demande à partir de quelle quantité produite, le coût unitaire passe en dessous de 10€. Cette question de seuil se traduit par l'inéquation suivante

$$f(x) = 200 \times 10^{-0.1x} \leq 10$$

Pour résoudre cette inéquation, on peut envisager 3 méthodes

- **Tâtonnement** : en calculant successivement des de $f(x)$ et en essayant de s'approcher de 10. Cette méthode peut être rendu efficace en utilisant la calculatrice ou le tableur.
- **Algorithme** : en programmant un algorithme puis en faisant trouver le résultat par un ordinateur. On étudiera cette méthode plus tard.
- **Résolution exacte** : en résolvant de manière exacte l'inéquation. Pour cela, on a besoin d'une nouvelle fonction, le logarithme.

2 Fonction logarithme

Il existe plusieurs fonction logarithme, nous en étudierons une seule : le logarithme décimal.

Définition

Fonction logarithme décimal Pour tout nombre réel $a > 0$, il existe un unique nombre b tel que $10^b = a$.

b est appelé **logarithme décimal** de a et est noté $\log(a)$. On peut alors noter

$$e^b = a \quad \Leftrightarrow \quad b = \log(a)$$

La fonction **logarithme décimal**, notée \log , est la fonction qui à tout x réel **strictement positif** associe $\log(x)$

Propriété

- Soit a un nombre réel alors $\log(10^a) = a$.
- Soit a un nombre réel strictement positif alors $10^{\log(a)} = a$.
- Valeurs particulières

$$\log(1) = 0 \quad \log(10) = 1$$

Exemple Résolution de l'inéquation

$$200 \times 10^{-0.1x} \leq 10$$

À faire au crayon à papier : résoudre cette inéquation