

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes

1. $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$

2. $g(x) = 0.1x^5 + 2x^4 + x$

3. $h(x) = 5x^8 + 4x^4 + \frac{1}{x}$

4. $i(x) = (2x + 1) + (4x^2 - 1)$

5. $j(x) = -3x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 10$

6. $k(x) = 5x + \frac{3x^2}{2}$

7. $l(x) = (2x + 1)(4x^2 - 1)$

8. $m(x) = x^2(x - 1)$

9. $n(x) = 5x(x^4 + x)$

Exercice 2

Démonstrations

Dans cet exercice, nous allons démontrer quelques formules de dérivations (toutes les autres formules se démontrent de la même manière, les calculs sont juste un peu plus long).

1. Formule de dérivation de $f(x) = 1$.

On veut connaître la dérivée de $f(x)$ au point x . Pour cela, on définit $x_1 = x$ et $x_2 = x + h$ avec h un nombre que l'on rendra très petit.

(a) Calculer $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

(b) En rendant h très petit (proche de 0) déterminer $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

2. Formule de dérivation de $g(x) = 2x$.

On veut connaître la dérivée de $g(x)$ au point x . Pour cela, on définit $x_1 = x$ et $x_2 = x + h$ avec h un nombre que l'on rendra très petit.

(a) Calculer $\frac{\Delta g}{\Delta x}$.

(b) En rendant h très petit (proche de 0) déterminer $g'(x) = \frac{dg}{dx}$.

3. De la même façon que dans les deux questions précédentes, démontrer que la dérivée de $h(x) = x^2$ est

$$h'(x) = \frac{dh}{dx} = 2x.$$

4. Démonstration de formule dérivation d'un produit : $f(x) = u(x) \times v(x)$ se dérive en $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

Comme précédemment, on pose $x_1 = x$ et $x_2 = x + h$ avec h un nombre que l'on rendra très petit.

(a) Exprimer en fonction de u et v la quantité $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

(b) Simplifier l'expression $\frac{\Delta u}{\Delta x} \times v(x + h) + u(x) \times \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

(c) En déduire la formule de dérivation du produit.

Exercice 3

Cercle et rayon

On travaille avec un cercle de rayon R . On définit les deux formules suivantes

Périmètre : $P(R) = 2\pi R$

Aire : $A(R) = \pi R^2$

1. Calculer $\frac{dP}{dR}$.

2. Calculer $\frac{dA}{dR}$.

3. (*) Exprimer A en fonction P et en déduire $\frac{dA}{dP}$.

Exercice 4

Étude de variations

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = 0.5t^4 + t^3 + t^2 + 3t + 1$$

1. Calculer $f'(t)$ puis en déduire que $f'(t) = (t^2 + 1)(2t + 3)$.

2. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire les variations de $f(t)$.

3. La fonction f a-t-elle un maximum? Un minimum? Quelle est alors sa valeur?