

# Logarithme et équation puissance - Cours

- décembre 2020

## 1 Question de seuil

Il est souvent pertinent de chercher la valeur de  $x$  à partir de laquelle une fonction va dépasser ou passer en dessous une certaine valeur. On appelle cela un **seuil**.

Par exemple, dans l'exercice *économie d'échelle*, le coût unitaire est donné par la fonction  $f(x) = 200 \times 10^{-0.1x}$  et l'on se demande à partir de quelle quantité produite, le coût unitaire passe en dessous de 10€. Cette question de seuil se traduit par l'inéquation suivante

$$f(x) = 200 \times 10^{-0.1x} \leq 10$$

Pour résoudre cette inéquation, on peut envisager 3 méthodes

- **Tâtonnement** : en calculant successivement des valeurs de  $f(x)$  et en essayant de s'approcher de 10. Cette méthode peut être rendue efficace en utilisant la calculatrice ou le tableur.
- **Algorithme** : en programmant un algorithme puis en faisant trouver le résultat par un ordinateur. On étudiera cette méthode plus tard.
- **Résolution exacte** : en résolvant de manière exacte l'inéquation. Pour cela, on a besoin d'une nouvelle fonction, le logarithme.

## 2 Fonction logarithme

Il existe plusieurs fonction logarithme, nous en étudierons une seule : le logarithme décimal.

### Définition

Fonction logarithme décimal Pour tout nombre réel  $a > 0$ , il existe un unique nombre  $b$  tel que  $10^b = a$ .

$b$  est appelé **logarithme décimal** de  $a$  et est noté  $\log(a)$ . On peut alors noter

$$e^b = a \quad \Leftrightarrow \quad b = \log(a)$$

La fonction **logarithme décimal**, notée  $\log$ , est la fonction qui à tout  $x$  réel **strictement positif** associe  $\log(x)$

### Propriété

- Soit  $a$  un nombre réel alors  $\log(10^a) = a$ .
- Soit  $a$  un nombre réel strictement positif alors  $10^{\log(a)} = a$ .
- Valeurs particulières

$$\log(1) = 0 \quad \log(10) = 1$$

**Exemple** Résolution de l'inéquation

$$200 \times 10^{-0.1x} \leq 10$$

**À faire au crayon à papier : résoudre cette inéquation**