

Probabilité Conditionnelles - Plan de travail

1ST – avril 2023

Savoir-faire de la séquence

- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs.

1 Évènement et notation

- ✂ Exercice 1 : Mobilités ☆☆☆☆☆
- ✂ Exercice 2 : Erreur de contrôle ☆☆☆☆☆

2 Probabilité conditionnelle

- 🔍 Exercice 3 : Étranges poissons ☆☆☆☆☆
- ✂ Exercice 4 : Orientation ☆☆☆☆☆
- ✂ Exercice 5 : Impression de livres ☆☆☆☆☆
- ✂ Exercice 6 : Villes et voitures ☆☆☆☆☆

3 Étude de cas

- ✂ Exercice 7 : Tests Covid ☆☆☆☆☆

Exercice 1 ✂

Mobilités

On a réalisé une enquête dans un lycée où il y a 1 200 élèves.

1. Reproduire et compléter le tableau ci-contre avec les informations suivantes.

- 42.5% des élèves habitent en centre-ville.
- 50% des élèves utilisent les transports en commun et parmi eux, 75% habitent en périphérie.
- 180 utilisent la voiture dont 30 habitent en centre-ville.
- 25% des élèves viennent à pied.
- Parmi les cyclistes, il a trois fois plus d'élèves qui habitent en périphérie qu'en centre-ville.

	Centre-ville	Périphérie	Total
Voiture			
Vélo			
À pied			
Autre			
Total			1 200

2. Avec les notations suivantes, décrire avec une phrase puis calculer l'effectif des ensembles

$$A = \{\text{habite en centre-ville}\} \quad B = \{\text{utilise de vélo}\}$$

$$A \cap B \quad A \cup B \quad \bar{A} \quad \bar{A} \cap B \quad \overline{A \cup B}$$

Exercice 2

Erreur de contrôle

Une entreprise fabrique en grande série des pièces. Les aléas de productions font que 5% des pièces ont un défaut. Cette entreprise dispose d'un appareil qui contrôle la qualité des pièces. Cet appareil accepte toutes les pièces sans défauts, mais ne refuse que 80% des pièces qui ont un défaut.

1. On considère un échantillon de 10 000 pièces représentatif. Compléter le tableau croisé ci-contre.

	Avec défaut	Sans défaut	Total
Acceptées			
Refusées			
Total			

2. On note les ensembles suivants :

- $D = \{\text{avec défaut}\}$
- $A = \{\text{Acceptée}\}$

Écrire avec les notations ensemblistes les ensembles ci-dessous puis calculer les probabilités associées.

1. $\{\text{avec défaut et acceptée}\}$ | 2. $\{\text{sans défaut ou acceptée}\}$ | 3. $\{\text{refusée ou sans défaut}\}$

Exercice 3

Étranges poissons

Le tableau suivant indique les quantités de poissons d'un étang ayant certaines caractéristiques.

	nageoires	ailerons	pattes	total
bleu	54	10	30	94
vert	20	50	34	104
total	74	60	64	198

On pêche un poisson au hasard dans cet étang. Calculer les quantités suivantes en utilisant les bonnes notations.

1. La probabilité que le poisson soit bleu et ait des ailerons.
2. La probabilité que le poisson soit vert et n'ait pas de pattes.
3. Si on ne pêche que des poissons à nageoires, la probabilité qu'il soit bleu.
4. Si on ne pêche que des poissons bleus, la probabilité qu'il ait des pattes.

Exercice 4

Orientation

On a fait une étude sur l'orientation des élèves en filière technologique et on a rassemblé les résultats dans le tableau ci-dessous

	STI2D	STMG	ST2S	total
Garçon	11	10	22	43
Fille	5	20	10	35
total	16	30	32	78

On note les ensembles suivants :

- $G = \{\text{"L'élève est un garçon"}\}$
- $F = \{\text{"L'élève est une fille"}\}$
- $M = \{\text{"Élève de STMG"}\}$
- $D = \{\text{"Élève de STI2D"}\}$
- $S = \{\text{"Élève de ST2S"}\}$

Calculer les quantités suivantes

1. $P(G \cap S)$
2. $P_G(S)$

3. $P(F \cap D)$
4. $P_D(F)$

5. $P(G \cup M)$
6. $P_F(M)$

Exercice 5

Impression de livres

L'étude de la répartition des livres produit dans une imprimerie donne les résultats suivants

- 60% sont des romans et un quart d'entre eux sont au format de non poche
- 25% sont des essais et un cinquième d'entre eux sont au format poche
- le reste est constitué de livres de poésie. Et parmi ceux-là, deux tiers est au format poche.

1. Faire un tableau croisé des effectifs si l'on suppose que l'imprimerie fabrique au total 100 livres.
2. On choisit un livre au hasard, on note les évènements suivants

$$P = \{\text{le livre est au format poche}\} \quad E = \{\text{le livre est un essai}\}$$

- (a) Calculer la probabilité des évènements E et P .
- (b) Décrire avec une phrase puis calculer la probabilité de l'évènement $E \cap P$
- (c) Décrire avec une phrase puis calculer la probabilité de l'évènement \bar{E}
3. Calculer la quantité $P_E(P)$ et interpréter le résultat.
4. Traduire en termes de probabilité la phrase "20% des essais sont au format poche".

Exercice 6

Villes et voitures

Dans une ville A, 30 % des habitants n'ont pas de voiture, contre 10 % dans la ville B voisine et 16 % dans la ville C. Or les habitants de A représentent 12 % de cette agglomération, les habitants de la ville B en représentent 38 % et ceux de C en représentent 50 %.

On interroge un habitant de l'agglomération au hasard. Quelle est la probabilité qu'il vienne de la ville A et qu'il n'ait pas de voiture? Même question pour les habitants de la ville B et C.

Exercice 7

Tests Covid

En 2020, on pouvait lire l'article suivant dans le monde.

Dans la suite on note P = "test positif" et I = "patient infecté".

1. Chercher dans l'article les valeurs de la sensibilité et de la spécificité du test Covid. Puis traduire ces valeurs en terme de probabilités.
2. On se place dans le premier cas où 1% de la population est infecté.

- (a) On étudie une population de 1000 individus. Compléter le tableau suivant
- (b) Calculer la probabilité que parmi les testés positifs, le patient ne soit pas infecté.
- (c) Calculer la probabilité que parmi les testés négatif, le patient ne soit pas infecté.

	infecté	non infecté	total
Test positif			
Test négatif			
total			1000

3. Mêmes questions pour le cas où 10% de la population est infectée.
4. Mêmes questions pour le cas où 30% de la population est infectée.
5. Que pensez-vous de ces tests?

LES SURPRISES STATISTIQUES DES TESTS DE DÉPISTAGE DU COVID-19

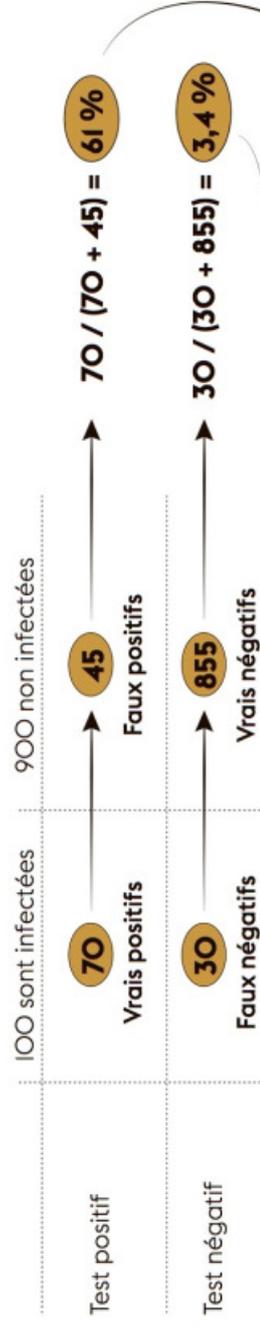
COMMENT CALCULER UN RISQUE APRÈS UN TEST

Trois populations ont a priori **1 %** ou **10 %** ou **30 %** de risque d'être infectées

Critères de fiabilité d'un test

Sensibilité : 70 % (proportion d'infectés positifs, dits « vrais positifs »)
 Spécificité : 95 % (proportion de sains négatifs, dits « vrais négatifs »)

Sur 1 000 personnes d'une population modérément à risque (10 %)



Je suis négatif, j'ai statistiquement...

... 0,3 % de risque d'être infecté

... 3,4 % de risque d'être infecté

... 12 % de risque d'être infecté

Je suis positif, j'ai statistiquement...

... 12 % de risque d'être infecté

... 61 % de risque d'être infecté

... 86 % de risque d'être infecté

Savoir si l'on a un risque d'être infecté après un test dépend notamment de la qualité du test (sa capacité à identifier les vrais positifs ou négatifs), mais aussi du risque estimé d'être infecté : région plus ou moins à risque, présence de symptômes...
 Pour un risque individuel modéré de 10 %, dans l'exemple où 1 000 personnes passent un test, il y aura 70 (= 1 000 x 10 %) vrais positifs et 45 (= 900 - (900 x 95 %)) faux positifs. Soit 61 % de risque (= 70 / (70 + 45)) seulement que l'on soit infecté malgré un test positif. Et 3,4 %, après un test négatif, de risque d'être infecté.

INFOGRAPHIE : PHILIPPE DA SILVA

SOURCE : LE MONDE

Un test de dépistage a beau être excellent, les statistiques peuvent brouiller son message et aboutir parfois à des situations paradoxales (quelles que soient les maladies). Ainsi, une personne positive peut n'avoir qu'une

chance sur deux, voire seulement quelques pourcents de chance, d'être en réalité infectée. Le diagnostic final dépend donc non seulement des facteurs jouant sur la qualité du dépistage (fiabilité des tests, difficulté du prélèvement, moment du test...), mais aussi de la probabilité individuelle d'être malade a priori : présence de symptômes, métier plus ou moins à risque, région d'origine... Les médecins, pour les aider à interpréter ces résultats, dispo-

sent de tables « corrigeant » la réponse d'un test en fonction des probabilités d'être malade. Ainsi, même à un patient négatif, il peut être conseillé de s'isoler ou de refaire un test. ■

DAVID LAROUSSE