

# Polynôme du 2nd degré - Plan de travail

1ST – mars 2023

## 1 Problème de la boîte

- Q** Exercice 1 : Volume d'une boîte ..... ☆☆☆☆☆

## 2 Représentation graphique

- X** Exercice 2 : Identification des coefficients ..... ☆☆☆☆☆
- Q** Exercice 3 : Représentation graphique ..... ☆☆☆☆☆

## 3 Racines

- X** Exercice 4 : Racines ..... ☆☆☆☆☆
- Q** Exercice 5 : Racines et factorisation ..... ☆☆☆☆☆
- X** Exercice 6 : Factoriser ..... ☆☆☆☆☆

## 4 Etude de signes

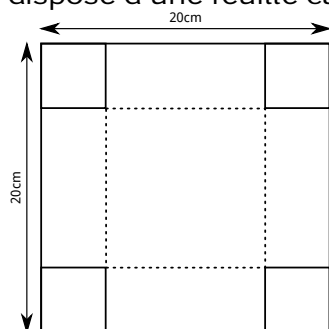
- X** Exercice 7 : Etude de signes ..... ☆☆☆☆☆
- X** Exercice 8 : Et la boîte dans tout ça ? ..... ☆☆☆☆☆

## 5 Problèmes

- X** Exercice 9 : Etude de fonction ..... ☆☆☆☆☆
- X** Exercice 10 : Technique ..... ☆☆☆☆☆
- X** Exercice 11 : Fruits en conserves ..... ☆☆☆☆☆

### Exercice 1 **Q** \_\_\_\_\_ Volume d'une boîte

On dispose d'une feuille cartonnée pour construire des boîtes sans couvercle.



Où doit-on plier les bords pour avoir une boîte la plus grande possible ?

## Exercice 2

## Identification des coefficients

Identifier les polynômes du 2nd et déterminer les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

a)  $f(x) = 7x^2 + 2x + 0.2$

b)  $f(x) = -2x^2 - 8x + 2$

c)  $f(x) = 3x^3 - 10x - 2$

d)  $f(x) = 6 + 4x^2 - 5x$

e)  $f(x) = -8 - 3x^2 + x$

f)  $f(x) = 3 + 4x^2 - x^3$

g)  $f(x) = -10x + 2$

h)  $f(x) = -10x^2 + 0.25$

i)  $f(x) = -5x^2 + x$

j)  $f(x) = (5x - 2)(3x - 1)$

k)  $f(x) = (2x + 1)(0.1x - 10)$

l)  $(*)f(x) = 3(x + 2)(x - 1)$

## Exercice 3

## Représentation graphique

On souhaite étudier les représentations graphiques des fonctions suivantes :

$$a(x) = 2x^2$$

$$b(x) = 5x^2 + 1$$

$$c(x) = 2(x - 1)(x - 4)$$

$$d(x) = -2x^2$$

$$e(x) = -2(x + 3)(x - 1)$$

$$f(x) = 5x^2 - 3$$

$$g(x) = 2x^2 + 3$$

$$h(x) = 2(x - 2)(x - 4)$$

$$i(x) = -0.5x^2$$

$$j(x) = 0.5x^2$$

$$k(x) = 2x^2 - 1$$

$$l(x) = -2(x + 1)(x - 4)$$

1. Regroupe les fonctions sur des critères de forme de la formule.
2. Pour chaque fonction, en vous aidant de la calculatrice, tracer l'allure du graphique. On ne demande pas un tracé précis, mais une forme générale qui respecte la position par rapport aux axes.
3. Faire une conjecture sur le lien entre la forme de la fonction et la forme du graphique associé.

## Exercice 4

## Racines

Les phrases suivantes sont-elles justes ou fausses ? Justifier

1. La valeur  $x = -1$  est une racine du polynôme  $f(x) = 3^2 - 2x - 3$ .
2. La valeur  $x = 3$  est une racine du polynôme  $g(x) = 5(x - 3)(x + 1)$ .
3. La valeur  $x = 4$  est une racine du polynôme  $h(x) = 2x^2 - 2x - 24$ .
4. La valeur  $x = -3$  est une racine du polynôme  $h(x) = 2x^2 - 2x - 24$ .
5. Les valeurs  $x = -10$  et  $x = 2$  sont deux racines du polynôme  $i(x) = x^2 + 8x - 20$ .
6. Les valeurs  $x = -10$  et  $x = 2$  sont deux racines du polynôme  $j(x) = (x + 10)(x - 2)$ .

## Exercice 5

## Racines et factorisation

1. Soient 2 fonctions polynômes du 2nd degré

$$f(x) = 5x^2 - 26x + 5 \quad g(x) = 5(x - 5)(x - 0.2)$$

- (a) Démontrer que  $x = 5$  et  $x = 0.2$  sont 2 racines de  $f$
  - (b) Démontrer que  $x = 5$  et  $x = 0.2$  sont 2 racines de  $g$
  - (c) Démontrer que  $f(x) = g(x)$  pour toutes valeurs de  $x$  réelles.
  - (d) Tracer la représentation graphique de  $f$ . Que ce passe-t-il pour les valeurs  $x = 5$  et  $x = 0.2$  ?
2. Soit  $h$  une fonction polynôme du 2nd degré

$$h(x) = x^2 + 2x - 15$$

- (a) Tracer la représentation graphique de  $f$ . Conjecturer (lire sur le graphique) les valeurs des 2 racines.
  - (b) En vous inspirant de ce qui a été fait avant, conjecturer une forme factorisée de  $f$ . Démontrer que cette forme factorisée convient.
3. Proposer une méthode pour factoriser un polynôme du 2nd degré.

Dans cet exercice, on souhaite factoriser des polynômes du 2nd degré.

1. On veut factoriser  $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$ .

(a) Démontrer que 5 est une racine de  $f$ .

(b) Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont des racines de  $f$ .

-3      -2      -1      1      2

(c) Démontrer que  $f(x)$  est égal à  $3(x + 2)(x - 5)$ .

2. On veut factoriser  $g(x) = 2x^2 - 6x + 4$ .

(a) Tracer la courbe représentative de  $f$  et trouver les racines de  $g$

(b) Proposer une factorisation de  $g$  en se basant sur les racines.

(c) Démontrer que cette factorisation est juste par un calcul.

Tracer le tableau de signe des fonctions suivantes

1.  $f(x) = 3(x - 2)(x + 1)$

2.  $g(x) = 5(x + 6)(x + 2)$

3.  $h(x) = -2(x - 5)(x - 1)$

4.  $i(x) = -0.1(x - 0.2)(x + 10)$

On a maintenant tous les outils pour terminer et résoudre l'exercice de la boîte. On rappelle que l'on souhaite trouver le maximum de la fonction

$$V(x) = x(20 - 2x)(20 - 2x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$$

On avait alors dérivé  $V$  et trouvé

$$V'(x) = 12x^2 - 160x + 400$$

On s'était arrêté là car on ne savait pas résoudre  $V'(x) = 0$ .

1. Démontrer que  $x = 10$  et  $x = \frac{10}{3}$  sont deux racines de  $V'(x)$ .

2. Démontrer que  $V'(x) = 12(x - 10)(x - \frac{10}{3})$

3. Tracer le tableau de signes de  $V'(x)$  pour  $x$  variant entre 0 et 10.

4. En déduire le tableau de variations de  $V(x)$  pour  $x$  variant entre 0 et 10.

5. Pour quelle valeur de  $x$ , le volume de la boîte est-il maximal?

On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = -0,1x^2 - 0,3x + 1,8$$

1. Calculer l'image de 3 et interpréter le résultat.

2. Démontrer que -6 est une racine de  $f$ .

3. Démontrer que l'on a  $f(x) = -0,1(x - 3)(x + 6)$ .

4. Tracer le tableau de signe de  $f$ .

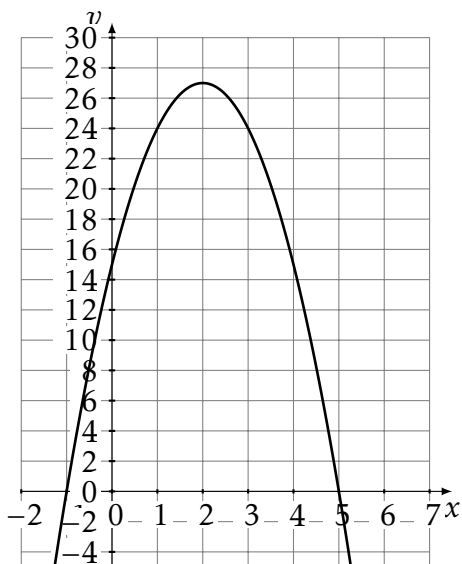
5. Dériver la fonction  $f$ .

6. En déduire le tableau de variations de  $f$ .

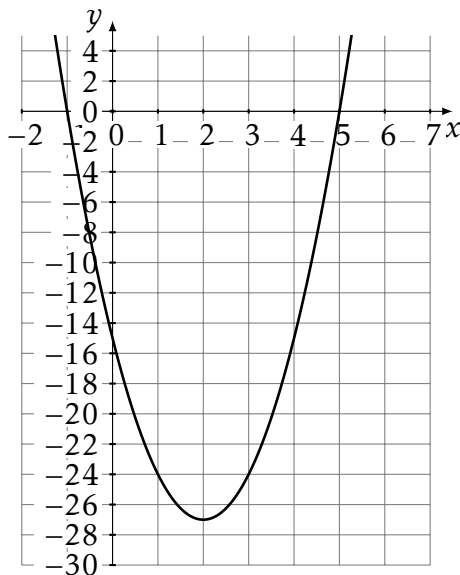
7. Déterminer les coordonnées du sommet de la représentation graphique de  $f$ .

8. Tracer l'allure de la représentation graphique.

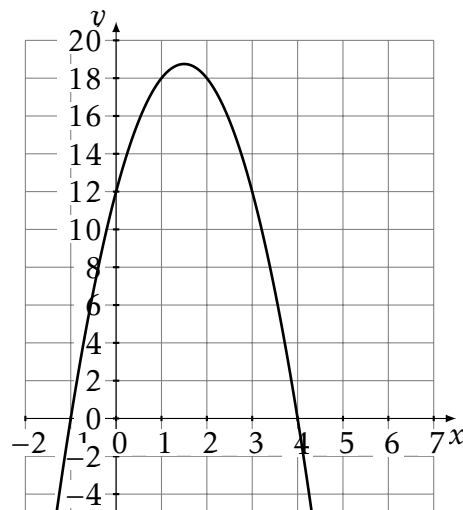
1. On considère la fonction polynôme  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -3(x + 1)(x - 5)$  et  $(P)$  la parabole représentant cette fonction.
  - (a) Donner les 2 racines de  $f$
  - (b) Développer  $f$
  - (c) Déterminer les coordonnées du sommet  $S$  de la parabole  $(P)$ .
  - (d) Dresser le tableau de signe de  $f$ .
  - (e) Parmi les représentations graphiques ci-dessous laquelle correspond à  $(P)$ ? Justifier.



courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

2. Résoudre l'équation  $f(x) < 15$

Une entreprise commercialise des fruits en conserve. Elle en produit entre 0 et 13 tonnes par mois et vend l'intégralité de sa production.

On note  $x$  la production en tonne de fruits et on définit :

- La fonction  $C(x)$  qui modélise les coûts de production

$$C(x) = x^3 - 15x^2 + 75x$$

- La fonction  $R(x)$  qui modélise les recettes

$$R(x) = 36,75x$$

1. Déterminer les coûts puis les recettes pour une production de 8,5 tonnes.
2. La fonction  $B(x)$  modélise les bénéfices de l'entreprise. C'est à dire la différence entre les recettes et les coûts

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

L'entreprise fait-elle des bénéfices quand elle produit 8,5 tonnes ?

3. Démontrer que  $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$
4. On note  $B'$  la dérivée de  $B$ . Démontrer que  $B'(x) = -3x^2 + 30x - 38,25$ .
5. Démontrer que  $x = 8,5$  et  $x = 1,5$  sont deux racines de  $B'(x)$ .
6. En déduire une forme factorisée de  $B'(x)$ .
7. En déduire le tableau de signe de  $B'(x)$
8. En déduire le tableau de variation de  $B(x)$
9. Pour quelle quantité de fruit produit, l'entreprise fait-elle un maximum de profit ?