Devoir maison: DM5

Première S 2 – À rendre le 02 mars 2015 **Sujet 1**

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié. Vous rendrez le sujet avec la copie.

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes

$$8x^2+5x-2 \quad > \quad 0$$

Solution: On commence par calculer le discriminant de $P(x)=8x^2+5x-2$.

$$\begin{array}{rcl}\Delta & = & b^2-4ac \\ \Delta & = & 5^2-4\times 8(-2) \\ \Delta & = & 25-4(-16) \\ \Delta & = & 25-(-64) \\ \Delta & = & 89\end{array}$$

comme $\Delta=89>0$ donc P a deux racines

$$\begin{array}{rcl}x_1 & = & \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5-\sqrt{89}}{2\times 8}=-0.9 \\ x_2 & = & \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5+\sqrt{89}}{2\times 8}=0.28\end{array}$$

Comme $a=8$, on en déduit le tableau de signe de P

x	$-\infty$		-0.9		0.28		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

On regarde maintenant où sont les + dans le tableau de signe pour résoudre l'inéquation.

$$-3x^2+2x+4 \quad \leq \quad 0$$

Solution: On commence par calculer le discriminant de $Q(x)=-3x^2+2x+4$.

$$\begin{array}{rcl}\Delta & = & b^2-4ac \\ \Delta & = & 2^2-4(-3)\times 4 \\ \Delta & = & 4-4(-12) \\ \Delta & = & 4-(-48) \\ \Delta & = & 52\end{array}$$

comme $\Delta=52>0$ donc Q a deux racines

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{52}}{2\times -3} = 1.54$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{52}}{2\times -3} = -0.87$$

Comme $a = -3$, on en déduit le tableau de signe de Q

x	$-\infty$		-0.87		1.54		$+\infty$
Q		$-$	0	$+$	0	$-$	

On regarde maintenant où sont les $-$ dans le tableau de signe pour résoudre l'inéquation.

$$8x^2+5x-2 \geq -3x^2+2x+4$$

Solution: On commence par se ramener à une équation de la forme $ax^2+bx+c \geq 0$.

$$\begin{aligned}
8x^2+5x-2 \geq -3x^2+2x+4 &\Leftrightarrow 8x^2+5x-2-(-3x^2+2x+4) \geq 0\\
&\Leftrightarrow 8x^2+5x-2-(-3x^2+2x+4) \geq 0\\
&\Leftrightarrow 8x^2+5x-2+3x^2-2x-4 \geq 0\\
&\Leftrightarrow (8+3)x^2+(5+(-2))x+(-2)+(-4) \geq 0\\
&\Leftrightarrow 11x^2+3x-6 \geq 0
\end{aligned}$$

Ensuite on étudie le signe de $R(X) = 11x^2+3x-6$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2-4ac\\
\Delta &= 3^2-4\times 11(-6)\\
\Delta &= 9-4(-66)\\
\Delta &= 9-(-264)\\
\Delta &= 273
\end{aligned}$$

comme $\Delta = 273 > 0$ donc R a deux racines

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{273}}{2\times 11} = -0.89$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{273}}{2\times 11} = 0.61$$

Comme $a = 11$, on en déduit le tableau de signe de R

x	$-\infty$		-0.89		0.61		$+\infty$
R		$+$	0	$-$	0	$+$	

On regarde maintenant où sont les $+$ dans le tableau de signe pour résoudre l'inéquation.

Exercice 2

Tracer le tableau de variation des fonctions suivantes *(Vous pouvez utiliser les nombres à virgules)*

1 $f : x \mapsto -10x^3 + x^2 - 7x + 5$

Solution: Pour avoir les variations de f, il faut connaître le signe de sa dérivé. On dérive P

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(-10)x^2 + 2 \times 1x + 1(-7) \\ f'(x) &= -30x^2 + 2x - 7 \end{aligned}$$

On étudie le signe de P'
Ensuite on étudie le signe de $f'(x) = -30x^2 + 2x - 7$.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= 2^2 - 4(-30)(-7) \\ \Delta &= 4 - 4 \times 210 \\ \Delta &= 4 - 840 \\ \Delta &= -836 \end{aligned}$$

Alors $\Delta = -836 < 0$ donc f' n'a pas de racine.
Comme $a = -30$, on en déduit le tableau de signe de f'

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de f'	$-$

2 $g : x \mapsto -9x^3 - 8x^2 - 5x - 2$

Solution: Pour avoir les variations de g, il faut connaître le signe de sa dérivé. On dérive P

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3(-9)x^2 + 2(-8)x + 1(-5) \\ g'(x) &= -27x^2 - 16x - 5 \end{aligned}$$

On étudie le signe de P'
Ensuite on étudie le signe de $g'(x) = -27x^2 - 16x - 5$.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-16)^2 - 4(-27)(-5) \\ \Delta &= 256 - 4 \times 135 \\ \Delta &= 256 - 540 \\ \Delta &= -284 \end{aligned}$$

Alors $\Delta = -284 < 0$ donc g' n'a pas de racine.
Comme $a = -27$, on en déduit le tableau de signe de g'

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de g'	$-$

3 $h : x \mapsto -7x^2 - 9x + 3 - f(x)$

Solution: On commence par simplifier l'expression de h

$$\begin{aligned}
h(x) &= -7x^2 - 9x + 3 - f(x)\\
h(x) &= -7x^2 - 9x + 3 - (-10x^3 + x^2 - 7x + 5)\\
h(x) &= -7x^2 - 9x + 3 + 10x^3 - x^2 + 7x - 5\\
h(x) &= 10x^3 + ((-7) + (-1))x^2 + ((-9) + 7)x + 3 + (-5)\\
h(x) &= 10x^3 - 8x^2 - 2x - 2
\end{aligned}$$

Pour avoir les variations de h, il faut connaître le signe de sa dérivé. On dérive P

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 3 \times 10x^2 + 2(-8)x + 1(-2)\\
h'(x) &= 30x^2 - 16x - 2
\end{aligned}$$

On étudie le signe de P'
Ensuite on étudie le signe de $h'(x) = 30x^2 - 16x - 2$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac\\
\Delta &= (-16)^2 - 4 \times 30(-2)\\
\Delta &= 256 - 4(-60)\\
\Delta &= 256 - (-240)\\
\Delta &= 496
\end{aligned}$$

comme $\Delta = 496 > 0$ donc h' a deux racines

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - \sqrt{496}}{2 \times 30} = -0.1\\
x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + \sqrt{496}}{2 \times 30} = 0.64
\end{aligned}$$

Comme $a = 30$, on en déduit le tableau de signe de h'

x	$-\infty$		-0.1		0.64		$+\infty$
Signe de h'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3

Appliquer l'algorithme de tri vu en cours à la suite suivante

6914	6851	6532	6884	6164	6495